Cinématique d'un robot mobile de type unicycle

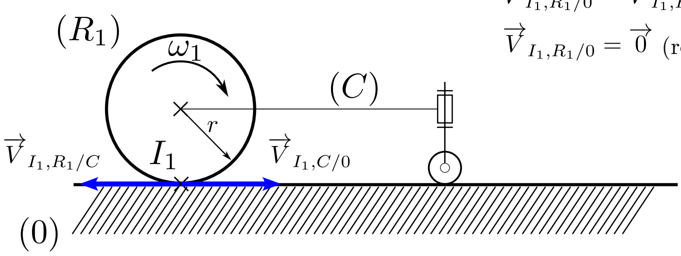
1 Introduction et paramétrage

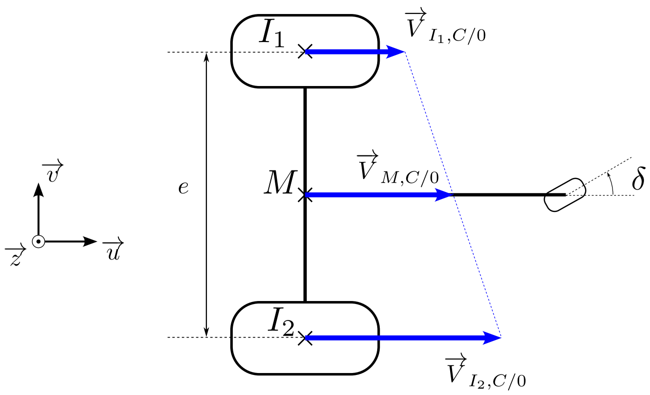
On qualifiera d'unicyle un robot mobile constitué de deux roues motrices indépendantes situées sur le même essieu et d'une roue folle (non motorisée) assurant la stabilité du robot.

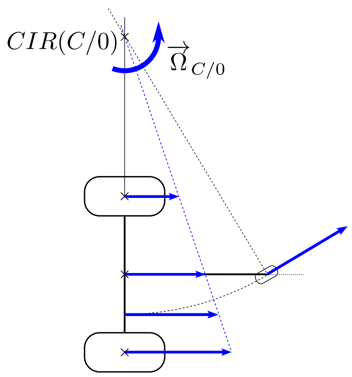
En supposant le roulement sans glissement des roues sur le sol :

$\overrightarrow{V}_{I_1,R_1/0} = \overrightarrow{V}_{I_1,R_1/C} + \overrightarrow{V}_{I_1,C/0}$

$\overrightarrow{V}_{I_1,R_1/0} = \overrightarrow{0}$ (roulement sans glissement)







À tout instant, le centre instantanné de rotation (CIR) du mouvement du chassis par rapport au sol définit le champ des vitesses en rotation. Notons que lorsque les deux moteurs tournent à la même vitesse, le CIR s'éloigne à l'infini et toutes les vitesses sont identiques, c'est une translation.

Il est alors possible de déterminer les éléments du torseur cinématique : $\{\mathcal{V}_{C/O}\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{C/0}\\ \vec{V}_{M,C/0}\end{array}\right\}_M$

2 Détermination du torseur cinématique du robot en fonction des vitesses angulaires des moteurs

En transportant le torseur respectivement en I_1 et I_2 :

$\vec{V}_{I_1,C/0}=\vec{V}_{M,C/0}+\overrightarrow{I_1M}\wedge\vec{\Omega}_{C/0}$ avec $\vec{V}_{I_1,C/0}=r\omega_1\vec{u}$ et $\overrightarrow{I_1M}=-\frac{e}{2}\vec{v}$

$\vec{V}_{I_2,C/0}=\vec{V}_{M,C/0}+\overrightarrow{I_2M}\wedge\vec{\Omega}_{C/0}$ avec $\vec{V}_{I_2,C/0}=r\omega_2\vec{u}$ et $\overrightarrow{I_2M}=\frac{e}{2}\vec{v}$

Par addition :

$\vec{V}_{I_1,C/0}+\vec{V}_{I_2,C/0}=2\vec{V}_{M,C/0}+(\overrightarrow{I_1M}+\overrightarrow{I_2M})\wedge\vec{\Omega}_{C/0}=2\vec{V}_{M,C/0}$

On obtient : $\boxed{\vec{V}_{M,C/0}=\frac{1}{2}(\vec{V}_{I_1,C/0}+\vec{V}_{I_2,C/0})=\frac{r}{2}(\omega_1+\omega_2)\vec{u}}$

Par soustraction :

$\vec{V}_{I_2,C/0}-\vec{V}_{I_1,C/0}=\overrightarrow{I_2M}\wedge\vec{\Omega}_{C/0}-\overrightarrow{I_1M}\wedge\vec{\Omega}_{C/0}=e\,\vec{v}\wedge\vec{\Omega}_{C/0}$

En projection sur $\vec{u}$: $(\vec{V}_{I_2,C/0}-\vec{V}_{I_1,C/0})\cdot\vec{u}=(e\,\vec{v}\wedge\vec{\Omega}_{C/0})\cdot\vec{u}=e(\,\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{\Omega}_{C/0}=e\vec{z}\cdot\vec{\Omega}_{C/0}$

On obtient : $\boxed{\vec{\Omega}_{C/0}=\frac{r}{e}(\omega_2-\omega_1)\vec{z}}$

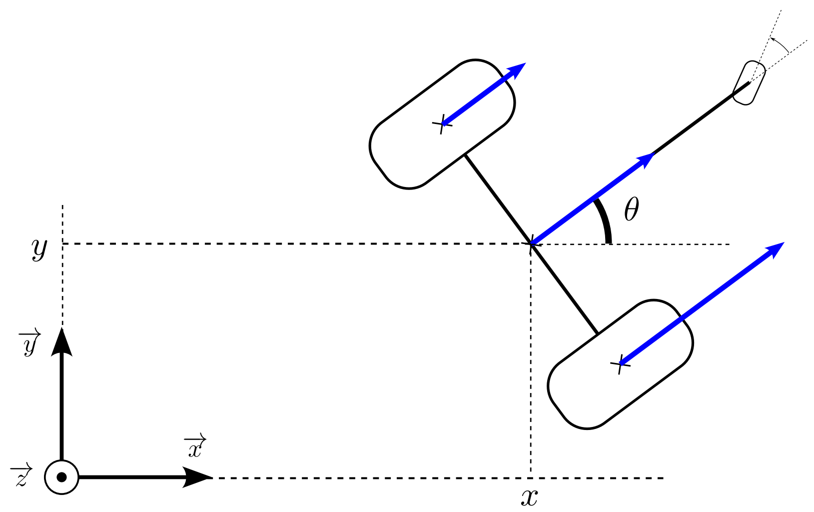
Par commodité, on introduit les notations : $\vec{V}_{M,C/0}=V\vec{u}$ et $\vec{\Omega}_{C/0}=\Omega\vec{z}$

On peut alors relier les vitesses angulaires des deux roues aux caractéristiques cinématiques du robot (au centre de l'essieu) :

$\begin{pmatrix} V \\ \Omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{e} & \frac{r}{e} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ forme matricielle qui s'inverse en $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{e}{2r} \\ \frac{1}{r} & \frac{e}{2r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ \Omega \end{pmatrix}$

3 Répérage et cinématique du robot dans le plan

Pour un repérage du robot dans le plan :



On définit un vecteur $p=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$ on peut alors écrire

$$\dot{p}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V\cos\theta \\ V\sin\theta \\ \Omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{r}{2}(\omega_1+\omega_2)\cos\theta \\ \dfrac{r}{2}(\omega_1+\omega_2)\sin\theta \\ \dfrac{r}{e}(\omega_2-\omega_1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\cos\theta \\ \frac{r}{2}\sin\theta & \frac{r}{2}\sin\theta \\ -\frac{r}{e} & \frac{r}{e} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la vitesse d'un autre point que le centre de l'essieu dans le repère fixe $\mathcal{R}_0$, on peut passer par les coordonnées de ce point dans le repère $\mathcal{R}_R$ au robot. Par exemple, on peut définir un point P tel que $\overrightarrow{MP}=a\,\vec{u}$. Dans ce cas, la vitesse du point P dans la base mobile est définie par $\overrightarrow{V_{P/\mathcal{R}_R}}=V\vec{u}-a\,\vec{u}\wedge\Omega\vec{z}=V\vec{u}+a\Omega\vec{v}$. Le vecteur décrivant les caractéristiques cinématiques au point P dans le repère $\mathcal{R}_R$ est noté : $q^R=\begin{pmatrix} V & a\Omega & \Omega \end{pmatrix}^T$ on cherche $q^0=\begin{pmatrix} \dot{x}_P & \dot{y}_P & \dot{\theta}_P \end{pmatrix}^T$ (dans le repère $\mathcal{R}_0$).

La vitesse de P dans la base fixe peut alors être déterminée en utilisant la matrice de rotation de la base liée au robot par rapport à la base fixe :

$$R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $q^0=R(\theta)\,q^R \Rightarrow q^0=\begin{pmatrix} V\cos\theta-a\Omega\sin\theta \\ V\sin\theta+a\Omega\cos\theta \\ \Omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{\theta}_P \end{pmatrix}$