Vous pourriez découper les approches comme suit :

**1- approche 1D « instantanée ».**

Si on considère un cylindre de hauteur h et de rayon R, d’un matériau de viscosité $η$, soumis au poids d’une masse m, alors en partant de la définition de la viscosité :

$η=\frac{σ}{\overset{·}{ε}}$,

avec $\overset{·}{ε}$ la vitesse de déformation en .s-1 et $σ$ la contrainte en Pa, qui vaut :

$σ=\frac{m.g}{π.R^{2}}$,

On peut écrire $\overset{·}{ε}$ en fonction de h et du temps t :

$\overset{·}{ε}=\frac{dh}{h.dt}=\frac{V\_{z}}{h}$,

avec Vz, la vitesse verticale de descente de la face supérieure du cylindre, considérée à un instant t.

On obtient donc :

$η=\frac{m.g.h}{π.R^{2}.V\_{z}}$,

Cette relation est valable si on considère Vz comme constante, ou si on peut la mesurer de façon instantanée en même temps que h et R.

*DL les premiers calculs …*

**2- approche 1D « finie »**

On peut reprendre la même définition avec :

$\overset{·}{ε}=\frac{dε}{dt}=\frac{σ}{η}$,

et :

$ε=\frac{h-h\_{0}}{h\_{0}}$,

avec h0 la hauteur initiale du cylindre, ce qui donne :

 $dε=\frac{dh}{h\_{0}}$ et $\overset{·}{ε}=\frac{dh}{h\_{0}.dt}$.

On a donc :

$\frac{dh}{h\_{0}.dt}=\frac{m.g}{π.R^{2}.η}$.

Par conservation du volume de pâte, on peut écrire :

$π.h\_{0}.R\_{0}^{2}=π.h.R^{2}$,

donc

$R^{2}=R\_{0}^{2}.\frac{h\_{0}}{h}$,

et donc :

$\frac{dh}{h}=\frac{m.g}{η.π.R\_{0}^{2}}.dt$.

En intégrant entre h0 et hf et t0 et t0 + ∆t la durée de l’expérience :

$∫\_{h\_{0}}^{h\_{f}}\frac{dh}{h}=∫\_{t\_{0}}^{t\_{0}+Δt}\frac{m.g}{η.π.R\_{0}^{2}}.dt$,

On obtient :

$ln(\frac{h\_{f}}{h\_{0}})=\frac{m.g.Δt}{η.π.R\_{0}^{2}}$,

et donc :

$η=\frac{m.g.Δt}{π.R\_{0}^{2}}ln(\frac{h\_{0}}{h\_{f}})$.

*DL les calculs …*

Cette équation rend compte cette fois du changement de surface d’application de la force, et on voit que la hauteur varie en exponentielle du temps. Mais dans ce cas encore, on fait l’hypothèse que le cylindre reste un cylindre, ce qui n’est pas le cas dans nos expériences. Pour limiter les effets de fluage vertical, il faut partir d’un cylindre peu épais (une crêpe), mais alors l’écoulement est radial et il faut faire un bilan des forces plus rigoureux sur cette crêpe. C’est le but de notre 3ème approche.

**3- Approche 2D en symétrie radiale**

3.1 Le bord de la crêpe décrit une hyperbole, due à un écoulement de Poiseuille entre les deux faces du disque, du type :

$v(r,z)=v\_{max}(r).(1-\frac{4.z^{2}}{h^{2}})$.

On peut trouver la valeur $V\_{moy}$ de la vitesse le long d’un profil vertical, en résolvant :

$v\_{moy}=\frac{1}{h}.∫\_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}v(z).dz$,

ce qui donne :

$v\_{moy}=\frac{2}{3}v\_{max}$.

On peut relier $V\_{moy}$ à la vitesse $V\_{z}$ d’écrasement du disque en écrivant la conservation du volume du cylindre :

$\frac{d(π.R^{2}.h)}{dt}=0$,

d’où :

$\frac{dR}{dt}=-\frac{R}{2h}.\frac{dh}{dt}$,

et donc

$v(r)=\frac{r}{2h}.V\_{z}$,

avec $V\_{z}$ comptée positivement vers le bas.

Donc l’expression de v(z) devient :

$v(r,z)=\frac{3r}{4h}.(1-\frac{4z^{2}}{h^{2}}).V\_{z}$,

et

$v\_{max}(r)=\frac{3r}{4h}.V\_{z}$.

3.2 Si le disque est assez grand, on peut relier le gradient radial de pression à la viscosité par la loi de Poiseuille :

$\frac{∂P}{∂r}=\frac{8η}{h^{2}}.v\_{max}$.

En introduisant $V\_{z}$ on peut intégrer de r à R et de P(r) à P=0 à l’extérieur du disque (en R) :

$P(r)=∫\_{r}^{R}\frac{6.η.V\_{z}}{h^{3}}rdr=\frac{3η.V\_{z}.R^{2}}{h^{3}}(1-\frac{r^{2}}{R^{2}})$.

On peut ensuite remonter à la force comme l’intégrale des pressions exercées sur chaque couronne concentrique du disque :

$F\_{z}=∫\_{O}^{R}P(r).2πr.dr$,

Et on trouve :

$F\_{z}=\frac{3π.η.V\_{z}.R^{4}}{2h^{3}}$,

et donc, si cette force est le poids d’une masse m posée sur le disque :

$η=\frac{2m.g.h^{3}}{3πV\_{z}.R^{4}}$.

Si on mesure Vz, h et R à un instant donné, alors on peut estimer la viscosité.

L’étape ultérieure est d’utiliser cette relation instantanée, et de l’intégrer sur le temps, en utilisant :

$R^{2}=R\_{0}^{2}.\frac{h\_{0}}{h}$,

et en introduisant :

$V\_{z}=-\frac{dh}{dt}$.

On obtient :

 $∫\_{h\_{0}}^{h\_{f}}-\frac{dh}{h^{5}}=∫\_{t\_{0}}^{t\_{0}+Δt}\frac{2m.g}{3πηR\_{0}^{4}h\_{0}^{2}}.dt$,

d’où :

$η=\frac{8m.g.Δt}{3πη.R\_{0}^{4}.h\_{0}^{2}}.\frac{1}{(h\_{0}^{4}-h\_{f}^{4})}$.