Calcul de la Force magnétique exercée sur le projectile

$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\,\vec{B}$ avec μ le moment magnétique du projectile

$\mu = \|\vec{\mu}\| = \chi H V$ avec
$\begin{cases} \chi \text{ la susceptibilité magnétique du projectile} \\ H = \|\vec{H}\| \text{ la norme du vecteur excitation magnétique} \\ V \text{ le volume du projectile} \end{cases}$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}}$ et $\underbrace{\vec{\mathcal{M}}}_{\text{vecteur aimantation}} = \frac{d\vec{M}}{dV}$ → résultante des moments dipolaires magnétiques

et μ_0 la perméabilité du vide

On suppose l'aimantation du projectile homogène : $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}$

et on a $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0}$

Ainsi $\boxed{\mu = \frac{\chi B V}{\mu_0}}$

Ici, on travaille à une dimension ($\vec{B}$ est selon $\vec{e_z}$) :

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\,\vec{B} \Rightarrow \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\,B_x = 0 \\ (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\,B_y = 0 \\ (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\,B_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_z = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B}{\partial z}}$$

Donc : $F_z = \frac{\chi B V}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z}$

$$\Rightarrow F_z = \frac{\chi V}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{\partial (B^2)}{\partial z}$$

$$\boxed{F_z = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{\partial (B^2)}{\partial z}}$$

En première estimation, on peut prendre un $\frac{\partial (B^2)}{\partial z}$ constant pour utiliser les valeurs numériques du champ calculées plus tôt.

Calculs de la force magnétique exercée sur le projectile

Premières estimations

- Le premier projectile utilisé était une bille donc $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- De plus, on calcule le gradient de $\vec{B}$ entre $\underbrace{z=0}_{\text{début bobine}}$ et $z_{\text{milieu de bobine}} = 2{,}5\,\text{cm}$
- $\chi_{fer} \simeq 200$ SI ; $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ SI ; $r \simeq 4\,\text{mm}$

$$F_z = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{B^2(z=2{,}5\,\text{cm}) - B^2(z=0)}{z_{\text{milieu}} - z}$$

On avait trouvé $B(\text{milieu}) = 0{,}34\,\text{mT}$

$B(\text{début}) = 0{,}20\,\text{mT}$

$$F_z = \frac{200 \times \frac{4}{3}\pi(4\times 10^{-3})^3}{2\times 4\pi \times 10^{-7}} \times \frac{(0{,}34\times 10^{-3})^2 - (0{,}20\times 10^{-3})^2}{2{,}5\times 10^{-2} - 0}$$

$$\Rightarrow F_z \simeq 21{,}3 \times 3{,}02\times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_z \simeq 64{,}3\,\mu N}$$ Pour une bille aimantée avec un gradient constant

- Pour un cylindre

$V = \pi r^2 h$ On prend $h = 5\times 10^{-2}\,m$

$r = 2\times 10^{-3}\,m$

$$F_z \simeq 50 \times 3{,}02 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_z \simeq 1{,}5\times 10^{-4}\,N \simeq 150\,\mu N}$$ On a donc une meilleure chance de déplacer le cylindre plutôt que la bille

---

On affine maintenant l'expression de F_z en remplaçant B^2 par son expression trouvée plus tôt : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u_z}$ pour une spire

Pour simplifier les calculs, on ne considère que le champ de la spire du milieu : la valeur de F_z obtenue sera inférieure à la valeur réelle mais donnera un ordre de grandeur de celle-ci.

$$F_z = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0^2 I^2 R^4}{4(R^2+z^2)^3}\right) = \frac{\chi V \mu_0 I^2 R^4}{8} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(R^2+z^2)^3}\right)$$

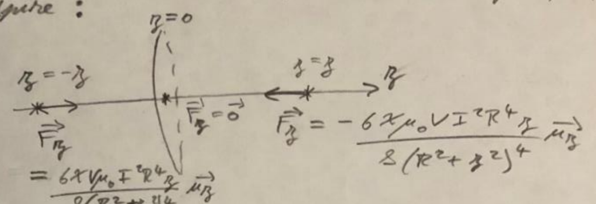
$$= \frac{\chi V \mu_0 I^2 R^4}{8} \times \frac{(-3)\times(2z)}{(R^2+z^2)^4}$$

$$= \frac{-6\,\chi V \mu_0 I^2 R^4 z}{8(R^2+z^2)^4}$$

$z = 0$ qd au milieu de la bobine

La force exercée par une spire sur un objet aimanté est donc nulle lorsque l'objet se trouve ds la spire.

Dans notre modèle, lorsque le projectile est dans la spire du milieu, il s'arrête après quelques oscillations. Ceci est cohérent avec la théorie puisque dans la formule de F_z, on voit que F_z change de signe lorsque l'objet passe la spire :



Lorsque l'on ajoute les autres spires et que l'on considère toujours que l'objet est dans la spire du milieu, la spire du milieu n'exerce pas de force sur l'objet et les forces exercées par les autres spires se compensent deux à deux par symétrie : l'objet est à l'équilibre au centre de la bobine, c'est ce que l'on observe.

On calcule maintenant la force exercée par la spire du milieu sur notre objet cylindrique lorsqu'il se trouve à l'entrée de la bobine : $z = -2,5$ cm $\quad I = 3A \quad R = 10^{-2}m$

$$F_z = \frac{6\times 200\times \pi\times(2\times10^{-3})^2\times 5\times10^{-2}\times 4\pi\times10^{-7}\times 3^2\times(10^{-2})^4\times 2,5\times10^{-2}}{8\times((10^{-2})^2+(2,5\times10^{-2})^2)^4}$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{2,13\times10^{-18}}{2,21\times10^{-12}} = 9,64\times10^{-7}N \simeq 1\mu N$$

Pour une spire se trouvant à 1 cm : $z=-1$ cm

$$F_z \simeq \frac{8,5\times10^{-19}}{1,28\times10^{-14}} \simeq 6,64\times10^{-5}N \simeq 66,4\ \mu N$$

Avec l'ensemble des spires, on devrait donc avoir F_z entre 100 et 200 μN.

Explication de ce que l'on observe et estimations finales