



LICENCE DE MECANIQUE 2^{ÈME} ANNEE

MODULE 2A102

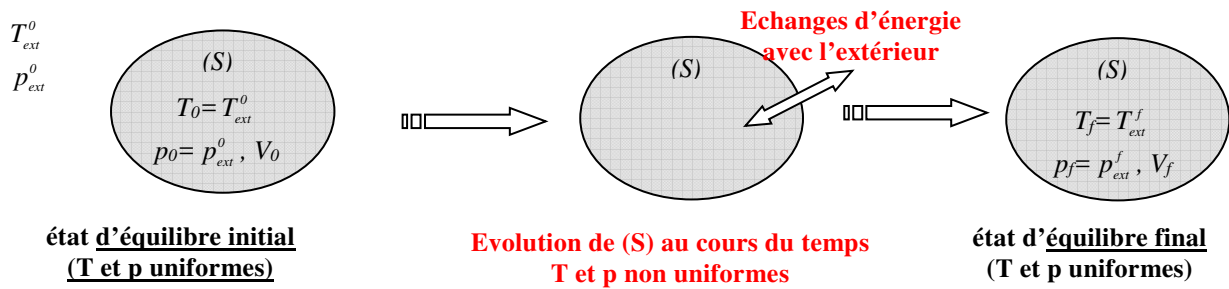
TRANSFERTS THERMIQUES

Sophie Mergui

Chap. 1 : GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR.....	3
I. Les trois modes de transfert de chaleur :.....	4
II. Définitions.....	3
III. Formulation d'un problème de transfert de chaleur.....	5
Chap. 2 : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION.....	8
I. Equation de la chaleur.....	8
II. Conduction en régime permanent sans dissipation interne de chaleur.....	11
1) Equation de la chaleur.....	11
2) Conduction dans un barreau.....	16
3) Le problème du mur.....	12
4) Problèmes à symétrie de révolution.....	17
5) Résistance thermique – Analogie électrique.....	19
6) Analogie électrique.....	19
7) Résistance de contact entre deux solides.....	20
III. Conduction en régime permanent avec dissipation interne de chaleur.....	22
1) Equation de la chaleur.....	22
2) Le problème du mur avec dissipation interne.....	22
3) Problèmes à symétrie de révolution.....	24
IV. Les Ailettes.....	25
1) L'équation de la chaleur pour des ailettes à section constante.....	26
2) Flux de chaleur évacué par une ailette infiniment longue et de section constante.....	29
3) Efficacité d'une ailette.....	30
4) Efficacité d'une surface munie d'ailettes.....	31
V. Conduction en régime variable dans un milieu à température uniforme – modèle du bloc isotherme.....	32
1) Equation de la chaleur.....	32
2) La trempe d'une bille métallique.....	32
3) Validité de l'approximation du milieu à température uniforme – nombre de Biot.....	34

CHAP. 1 : GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

La thermodynamique nous apprend que l'énergie peut être transférée à partir d'interactions entre le système et son environnement, sous forme de chaleur et de travail. Cependant, la thermodynamique ne se préoccupe que de l'état initial et de l'état final du système à l'équilibre, et ne fournit aucune information sur la nature des interactions mises en jeu et sur l'évolution temporelle du système entre les deux états d'équilibre.



Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps.

I. Définitions

1) Variations temporelles et spatiales

Les transferts de chaleur sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température, $T(x, y, z, t)$.

- La variation dans le temps en un point $M(x, y, z)$ du système est donnée par la dérivée partielle de $T(x, y, z, t)$ par rapport au temps : $\frac{\partial T}{\partial t}$

Pendant un intervalle de temps dt , la variation de température en un point M sera : $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

- La variation dans l'espace à un instant t est donnée par de **gradient de température** :

$$\vec{\nabla} T = \overrightarrow{grad} T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2) Flux de chaleur

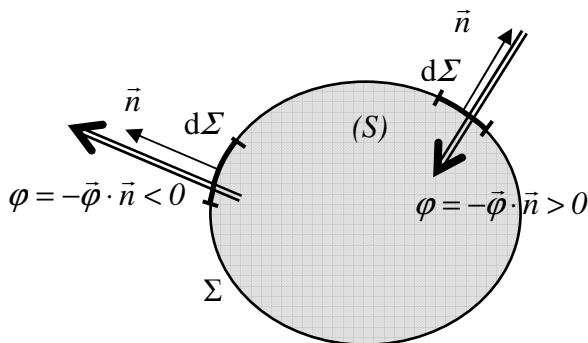
Un flux de chaleur est une quantité d'énergie transférée sous forme de chaleur par unité de temps. C'est donc une puissance, qui s'exprime en Watt (J/s) :

$$d\phi = \frac{\delta Q}{dt} \text{ ou } \phi = \frac{Q}{t} \quad (W)$$

➤ Densité de flux de chaleur

En général, le flux échangé à travers une surface n'est pas uniforme sur toute la surface. On définit alors une densité de flux de chaleur, φ , qui correspond à **un flux de chaleur par unité de surface (en W/m^2)**.

Exemple : flux de chaleur échangé par un système avec l'extérieur à travers une surface Σ :



$$\phi = \iint_{\Sigma} \varphi d\Sigma = \iint_{\Sigma} -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

\vec{n} est la normale extérieure à l'élément de surface $d\Sigma$.

Le signe '-' est introduit pour respecter la convention suivante : on compte positivement le flux qui entre dans le système.

II. Les trois modes de transfert de chaleur :

➤ Transfert de chaleur par conduction dans les solides (ou les fluides au repos).

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur.

➤ Transfert de chaleur par convection

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement. On distingue deux types de convection :

- *Convection naturelle*: les mouvements sont dus aux variations de masse volumique dans un fluide soumis au champ de pesanteur. Les variations de masse volumique peuvent être générées par des gradients de température (l'air chaud est plus léger que l'air froid) et/ou par des gradients de composition.

- *Convection forcée*: le mouvement du fluide est provoqué par des actions mécaniques extérieures (pompe, ventilateur...).
- On parlera de *convection mixte* lorsque les deux types de convection coexistent dans un système.

➤ Transfert de chaleur par rayonnement

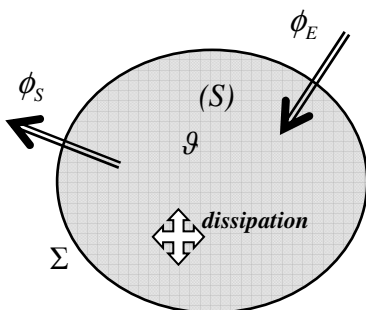
Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi-transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse.

III. Formulation d'un problème de transfert de chaleur

But : déterminer quantitativement l'évolution de la température à l'intérieur du système dans l'espace et dans le temps. L'équation qui permet d'obtenir cette information s'appelle l'équation de l'énergie ou équation de la chaleur. Comment établir cette équation ?

On réalise un bilan d'énergie sur le système c'est-à-dire que l'on applique le premier principe de la thermodynamique.

- Etape 1 : on définit un volume de contrôle (\mathcal{V}) limité par une surface de contrôle Σ à travers laquelle de l'énergie et de la matière peuvent circuler.
- Etape 2 : on fait l'inventaire des différents flux d'énergie mis en jeu qui influent sur l'état du système. Par exemple, si on s'intéresse aux flux de chaleur :



- **flux de chaleur entrant** : ϕ_E
- **flux de chaleur sortant** : ϕ_S
- **flux de chaleur dissipé** (produit) dans le volume : ϕ_{PR}

ϕ_{PR} a pour origine une forme d'énergie (chimique, électrique (effet Joule), nucléaire) qui est convertie en énergie thermique à l'intérieur du volume.

A l'issue de l'échange, le **flux de chaleur accumulé (stocké)** dans le volume va contribuer à la variation de l'énergie interne, qui se traduit par la variation de la température du volume.

- Etape 3 : on fait le bilan d'énergie en appliquant le premier principe de la thermodynamique :

$$\text{Accumulation} = \text{Entrée} - \text{Sortie} + \text{Production}$$

Si on suppose que le volume est incompressible (le travail des forces de pression est nul) et au repos, ce qui sera le cas dans toute la suite du cours, le premier principe s'écrit, pour une évolution entre les instants t et $t + dt$: $dU = \delta Q = \delta Q_{ext} + \delta Q_{int}$. Le terme δQ tient compte à la fois des échanges de chaleur avec l'extérieur, δQ_{ext} (relié à $\phi_E - \phi_S$), et du dégagement de chaleur interne, δQ_{int} , issu de la conversion d'une autre forme d'énergie en chaleur (relié à ϕ_{PR}).

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{ext}}{dt} + \frac{\delta Q_{int}}{dt} = \phi_E - \phi_S + \phi_{PR}$$

- Etape 4 : on établit les expressions des différents flux

a. Flux de chaleur échangé par conduction – loi de Fourier

Ce mécanisme de transfert est régi par une loi phénoménologique établie par Joseph Fourier en 1822, stipulant que la densité de flux échangée par conduction est proportionnelle au gradient de température (proportionnalité entre la cause (le gradient) et l'effet (le flux)). Cette loi, appelée **loi de Fourier**, s'écrit :

$$\vec{\phi} = -\lambda \vec{\nabla} T \text{ en } W/m^2$$

Le signe '-' intervenant dans cette loi traduit le fait que le flux de chaleur circule des zones chaudes vers les zones froides (dans le sens opposé au gradient de température).

Le coefficient de proportionnalité, λ , est la **conductivité thermique**, en $W/m/K$.

La conductivité thermique dépend de la nature du corps considéré et dépend généralement de la température. Elle traduit la capacité d'un matériau à transporter la chaleur par conduction.

Ainsi, pour un gradient de température donné, le flux de chaleur sera d'autant plus important que la conductivité sera grande. Pour les matériaux conducteurs de la chaleur, λ sera élevée et inversement sera faible pour les isolants. Exemples à la température ambiante :

$$\lambda_{\text{laine de verre}} = 0.04 \text{ W/m/K}$$

$$\lambda_{\text{air}} = 0.026 \text{ W/m/K (l'air immobile est un très bon isolant)}$$

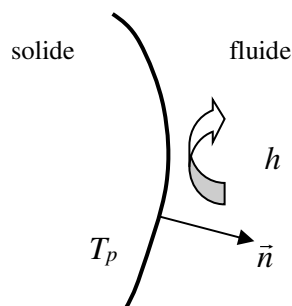
$$\lambda_{\text{verre}} = 1.2 \text{ W/m/K}$$

$$\lambda_{\text{cuivre}} = 390 \text{ W/m/K}$$

Par ailleurs, pour un flux de chaleur donné, le gradient de température sera d'autant plus faible que λ est grand. Pour des flux modérés, on pourra ainsi dans certains cas considérer que la distribution de température à l'intérieur d'un corps de grande conductivité thermique est quasi-uniforme.

b. Flux de chaleur échangé par convection – loi de Newton

Ce mécanisme de transfert est régi par la **loi de Newton** qui stipule que la densité de flux de chaleur échangé entre une paroi solide et un fluide en écoulement est proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance.



- du point de vue du solide (flux entrant dans le fluide ou sortant du solide si $T_p > T_\infty$):

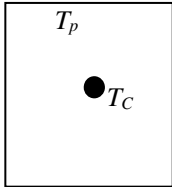
$$\vec{\phi} = h(T_p - T_\infty) \vec{n}$$

h est une grandeur positive appelée **coefficient d'échange convectif**, en $(W.m^{-2}.K^{-1})$. Ce coefficient dépend de nombreux paramètres (fluide, type d'écoulement, état de surface...) et est donc extrêmement difficile à quantifier précisément.

c. Flux de chaleur échangé par rayonnement – loi de Stefan

Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps à des températures différentes séparés par du vide ou un milieu semi-transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Ce mécanisme de transfert est régi par la **loi de Stefan**.

Ex : corps de petite dimension placé dans une enceinte fermée



$$\varphi = \varepsilon \sigma (T_p^4 - T_C^4)$$

ε : émissivité du corps ($0 < \varepsilon \leq 1$)

σ : constante de Stefan = $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$.

CHAP. 2 : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

I. Equation de la chaleur

Considérons un système fermé solide (ou fluide au repos) homogène et indéformable, occupant un volume \mathcal{V} limité par une surface Σ . Ce système évolue au cours du temps sous l'effet d'échanges d'énergie sous forme de chaleur avec l'extérieur à travers Σ et/ou de production interne d'énergie calorifique. La distribution de température à l'intérieur du volume n'est pas uniforme et évolue au cours du temps. Le système n'est donc pas à l'équilibre thermodynamique et est donc le siège de flux de chaleur.

Pour établir l'équation qui régit l'évolution de la température en chaque point du volume \mathcal{V} , nous allons faire un bilan d'énergie sur le système. Dans toute la suite du cours, on considèrera que le système est au repos et qu'il n'y a pas de travail mécanique mis en jeu car le système est indéformable (pas de variation de volume). La variation d'énergie interne du système entre les instants t et $t + dt$ est alors :

$$dU = \delta Q_{ext} + \delta Q_{int}$$

où : dU est la variation d'énergie interne du système pendant un intervalle de temps dt .

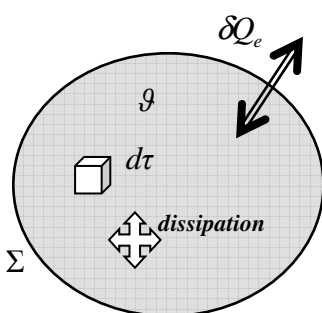
δQ_{ext} est la quantité de chaleur échangée par le système avec l'extérieur à travers Σ pendant l'intervalle de temps dt .

δQ_{int} est la quantité de chaleur produite par dissipation dans le volume total \mathcal{V} pendant l'intervalle de temps dt .

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{ext}}{dt} + \frac{\delta Q_{int}}{dt} = \phi_E - \phi_S + \phi_{PR}$$

Puisque le système dans son ensemble n'est pas homogène en température, donc pas à l'équilibre, nous ne pouvons pas appliquer directement le premier principe d'un point de vue macroscopique.

Nous allons donc considérer un élément de volume élémentaire, $d\tau$, suffisamment petit de telle sorte que la température à l'intérieur puisse être considérée uniforme (mais suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules). Le volume élémentaire peut alors être considéré à l'équilibre : on parle d'équilibre thermodynamique local.



volume du système : $\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} d\tau$

masse contenue dans $d\tau$: $dm = \rho d\tau$

ρ masse volumique du corps

masse du système : $m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$

a. Variation d'énergie interne de la masse m contenue dans (9) entre les instants t et $t + dt$

- la variation d'énergie interne pour l'unité de masse du système est :

$$du = c dT = c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

où : u est l'énergie interne massique

c est la chaleur spécifique (en $J/K/kg$) du matériau

- la variation d'énergie interne pour la masse dm contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ (considéré à l'équilibre thermodynamique donc de température uniforme) est :

$$dm du = \rho d\tau du = \rho d\tau c dT = \rho d\tau c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

- en intégrant sur l'ensemble du volume, on obtient la variation d'énergie interne pour la masse m contenue dans (9) pendant l'intervalle de temps dt :

$$dU = dt \iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Soit, par unité de temps :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau}$$

b. Flux de chaleur (ou puissance calorifique) dissipé à l'intérieur du volume (9):

Soit P la production volumique interne de puissance calorifique (en W/m^3).

$$\boxed{\phi_{PR} = \iiint_{\vartheta} P d\tau}$$

c. Flux de chaleur échangé par le système avec l'extérieur à travers la surface Σ :

$$\phi_E - \phi_S = \phi = \iint_{\Sigma} -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

avec $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T$ (transfert de chaleur par conduction – loi de Fourier)

$$\Rightarrow \boxed{\phi_E - \phi_S = \iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\Sigma}$$

Le premier principe $\frac{dU}{dt} = (\phi_E - \phi_S) + \phi_{PR}$ s'écrit :

$$\boxed{\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\Sigma + \iiint_{\vartheta} P d\tau}$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski¹ pour l'intégrale de surface, on obtient :

$$\boxed{\underbrace{\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau}_{\text{accumulation}} = \underbrace{\iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\Sigma}_{\text{échanges avec l'environnement}} + \underbrace{\iiint_{\vartheta} P d\tau}_{\text{production interne}}}$$

eq. I

¹ Théorème d'Ostrogradski ou théorème du flux-divergence : $\forall \vec{V} \quad \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\vartheta} \text{div} \vec{V} d\tau$

Ce bilan constitue l'**équation de la chaleur sous forme globale** (intégrée sur tout le volume). Il est valable quel que soit l'élément de volume $d\tau$. On peut alors écrire une **équation locale de la chaleur**, qui permet, après résolution, de déterminer la température en tout point du système à chaque instant.

Equation locale de la chaleur :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + P} \quad \text{dans } (\mathfrak{V}) \quad \text{eq. II}$$

Dans le cas où λ peut être considérée constante (milieu homogène et λ indépendante de T) :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \text{div}(\vec{\nabla} T) + P \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + P} \quad \text{dans } (\mathfrak{V})$$

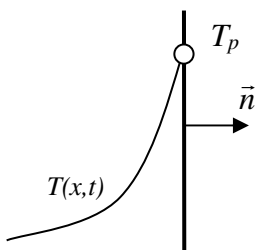
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{P}{\rho c}} \quad \text{dans } (\mathfrak{V})$$

où $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (Laplacien de la température).

et $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}}$ (m^2/s) est la **diffusivité thermique** du milieu, qui quantifie la vitesse à laquelle diffuse la chaleur à l'intérieur du milieu.

L'intégration de l'équation de la chaleur permet d'obtenir $T(x, y, z, t)$. On doit préciser :

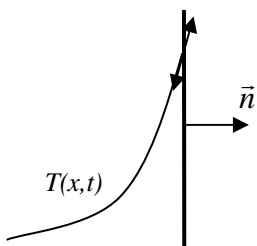
- ❖ Une **condition initiale** $T(x, y, z, t = 0)$ qui définit l'état thermique initial du système
- ❖ Deux **conditions aux limites imposées aux frontières**. Ces conditions peuvent être de deux types :
 - des conditions de type Dirichlet : on impose une température aux frontières.



Dans ce cas, le flux de chaleur traversant la frontière est inconnu (résulte des échanges). On pourra le calculer par la loi de Fourier appliquée à la frontière.

$$\varphi_{\Sigma} = -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma}$$

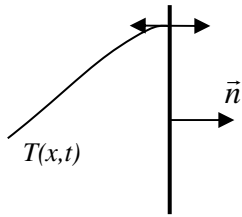
- des conditions de type Neumann : on impose un flux de chaleur, c'est-à-dire le gradient de température, aux frontières.



Dans ce cas, la température de la frontière est inconnue (résulte des échanges). De manière générale :

$$\varphi_{\Sigma} = -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma} \Rightarrow \text{on impose un gradient de}$$

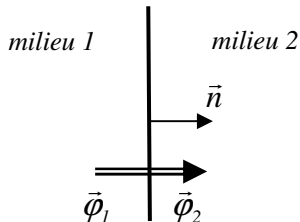
température \Rightarrow on impose la pente du profil de température à la frontière.



Cas particulier de la frontière adiabatique : dans ce cas, le flux de chaleur traversant la frontière est nul.

$$\varphi_{\Sigma} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{on impose une pente nulle au profil de température à la frontière.}$$

Conditions à l'interface entre deux milieux :



Continuité du flux à la traversée de l'interface :

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}_2 \quad \text{ou} \quad \boxed{(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2) \cdot \vec{n} = 0}$$

Pour l'exemple du schéma :

- du point de vue du milieu 1 : $\varphi_1 < 0$
 - du point de vue du milieu 2 : $\varphi_2 > 0$
- avec $\varphi_2 = -\varphi_1$

II. Conduction en régime permanent sans dissipation interne de chaleur

1) Equation de la chaleur

On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable et on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur établie précédemment :

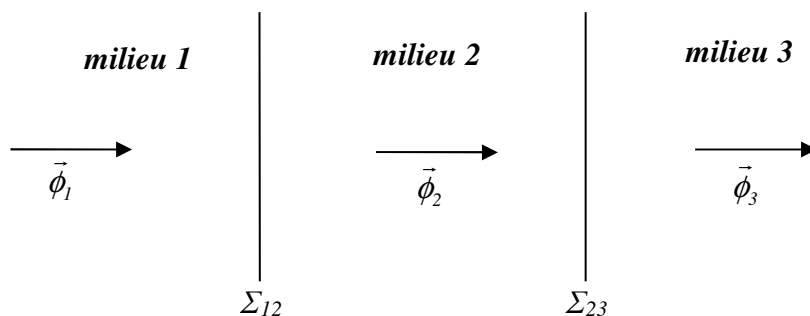
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + P$$

- En régime stationnaire (permanent) : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (le terme d'accumulation est nul) $\Rightarrow T(x, y, z)$
- Sans dissipation interne de chaleur : $P = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 T = 0} \quad \text{dans } (\mathcal{D})$$

Remarque importante : le terme $\nabla^2 T$ est lié au flux de chaleur qui traverse la frontière. En régime permanent sans dissipation, le bilan de flux qui entre et qui sort du domaine est donc nul. Si on considère le système, on aura également **conservation du flux de chaleur à la traversée de Σ** :

$$\phi = \phi_E - \phi_S = \iint_{\Sigma} -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) \, d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \lambda \nabla^2 T \, d\tau = 0$$

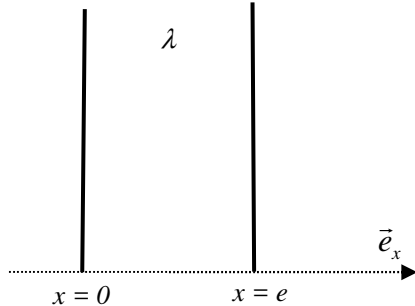


Conservation du flux : $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}_2 = \vec{\phi}_3 = \dots$

2) Le problème du mur

On considère un mur constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante, d'épaisseur e . On suppose que la hauteur et la profondeur du mur sont très grandes devant son épaisseur de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel.

Le flux de chaleur se propagera dans une seule direction (suivant x par exemple) et la température à l'intérieur du mur ne dépendra que d'une seule variable d'espace : $T = T(x)$.



$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = Cste = A \quad \Leftrightarrow T(x) = A x + B$$

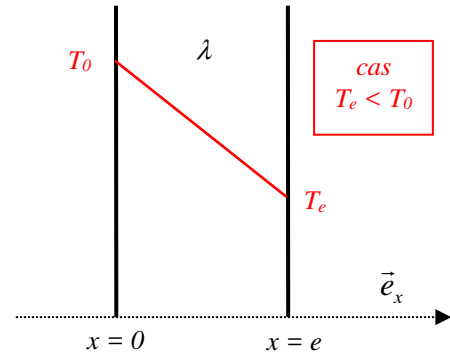
La distribution de température à l'intérieur du mur est linéaire.

Si on note : $T_0 = T(x=0)$

et $T_e = T(x=e)$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{T_e - T_0}{e} x + T_0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta(X) = \frac{T(x) - T_0}{T_e - T_0} = X} \quad \text{où } X = \frac{x}{e}$$



Déterminons la densité de flux de chaleur qui traverse le mur en x quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_x = \varphi_x \vec{e}_x$$

où on a posé : $\varphi_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e}$ (en W/m^2) $\varphi_x > 0$ (si $T_0 > T_e$) ou $\varphi_x < 0$ (si $T_0 < T_e$)

Le flux de chaleur traversant la surface du mur pour un x quelconque s'écrit :

$$\boxed{\phi_x = \iint_S \varphi_x dS = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e}} \quad (\text{en } W) \quad \phi_x > 0 \text{ ou } \phi_x < 0$$

où $S = \text{Hauteur} \times \text{Profondeur}$ du mur = **surface du mur traversée par le flux** (surface d'échange).

On constate que le flux de chaleur ne dépend pas de x , ce qui implique notamment que le flux qui traverse la frontière en $x=0$ sera égal au flux qui traverse la frontière en $x=e$, vérifiant ainsi la conservation du flux dans le cas du régime permanent sans dissipation.

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$\boxed{\phi = \phi_x = \frac{T_0 - T_e}{\frac{e}{\lambda S}}} \quad (2) \quad \text{et} \quad \boxed{T(x) = -\frac{\phi}{\lambda S} x + T_0} \quad (3)$$

Les flux aux frontières du point de vue du mur :

$$\phi = -\vec{\phi} \cdot \vec{n} \quad \text{où } \vec{n} \text{ normale extérieure à la frontière considérée}$$

Dans ce problème : $\vec{\phi} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_x$ indépendant de x

- en $x = 0$: $\vec{n} = -\vec{e}_x \Rightarrow \phi_0 = \vec{\phi}|_{x=0} \cdot \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e}$ en (W/m^2)

On vérifie bien que ϕ_0 est positif (entrant dans le mur) lorsque $T_0 > T_e$ (la chaleur se propage du chaud vers le froid).

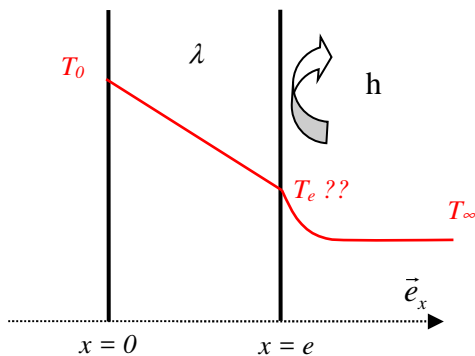
- en $x = e$: $\vec{n} = \vec{e}_x \Rightarrow \phi_e = -\vec{\phi}|_{x=e} \cdot \vec{e}_x = -\lambda \frac{T_0 - T_e}{e} = \lambda \frac{T_e - T_0}{e}$ en (W/m^2)

On vérifie bien que ϕ_e est négatif (sortant du mur) lorsque $T_0 > T_e$.

a. Si les deux faces du mur sont à température imposée

Alors l'équation (1) détermine complètement la distribution de température et l'équation (2) détermine le flux de chaleur qui traverse le système.

b. Si au moins une des faces du mur est au contact avec un fluide en écoulement



On reprend le mur précédent, mais cette fois-ci :

- la frontière en $x = 0$ est maintenue à température constante, T_0 .
- la frontière en $x = e$ est soumise à un flux convectif dû à l'écoulement du fluide, caractérisé par le coefficient d'échange convectif, h . La température du fluide loin du mur est connue, égale à T_∞ .

La distribution de température dans le mur sera toujours donnée par l'équation (1), mais dans ce cas, **la température T_e est a priori inconnue** car résulte des échanges de chaleur par conduction à l'intérieur du mur et par convection avec le fluide. De même, le flux de chaleur dans le mur est donné par l'équation (2) mais là encore, on doit connaître T_e pour le calculer.

à la frontière $x = e$:

- la densité de flux de chaleur du côté du mur ($x = e^-$) est donnée par l'équation la loi de Fourier :

$$\vec{\phi}|_{x=e^-} = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_x$$

- la densité de flux de chaleur échangé par convection avec le fluide ($x = e^+$) est donnée par la loi de Newton :

$$\vec{\phi}|_{x=e^+} = h(T_e - T_\infty)\vec{e}_x$$

La continuité du flux de chaleur à l'interface solide-fluide (en $x = e$) impose :

$$(\vec{\phi}|_{x=e^-} - \vec{\phi}|_{x=e^+}) \cdot \vec{e}_x \Leftrightarrow \boxed{\lambda \frac{T_0 - T_e}{e} - h(T_e - T_\infty) = 0}$$

On peut ainsi exprimer T_e en fonction des données du problème :

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(h + \frac{\lambda}{e}\right) T_e = \frac{\lambda}{e} T_0 + h T_\infty}$$

❖ Déterminons le flux de chaleur qui traverse le système :

- ✓ une première méthode consiste à remplacer l'expression de T_e dans l'expression de ϕ .
- ✓ une deuxième méthode, beaucoup plus utilisée, permet de s'affranchir du calcul explicite de T_e .

Le flux de chaleur qui traverse le mur (S est la surface d'échange) s'écrit :

$$\phi = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e} \text{ et } \phi = hS(T_e - T_\infty) \quad \text{soit :}$$

$$\begin{cases} T_0 - T_e = \frac{e}{\lambda S} \phi \\ T_e - T_\infty = \frac{1}{h S} \phi \end{cases}$$

En additionnant ces deux relations : $T_0 - T_\infty = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h}\right) \frac{\phi}{S}$

On peut donc écrire : $\boxed{\phi = \frac{T_0 - T_\infty}{\left(\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h S}\right)}} \quad (\text{en } W)$

On obtient ainsi une expression du flux à partir des données du problème, sans avoir à calculer la température T_e a priori inconnue. On pourra alors déterminer complètement la distribution de température dans le mur par l'équation (3) :

$$\boxed{T(x) - T_0 = -\frac{\phi}{\lambda S} x}$$

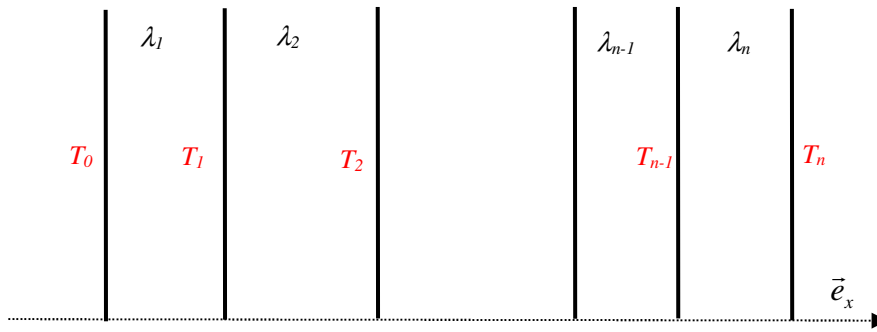
Si besoin, on aura alors facilement accès à la température en $x = e$: $T_e - T_0 = -\frac{\phi}{\lambda S} e$ ou

$$T_e - T_\infty = \frac{1}{h S} \phi$$

c. Succession de murs

Considérons une succession de n murs de matériaux différents, de conductivité λ_i et d'épaisseur e_i ($i = 1$ à n). On se place dans le cas où tous les murs ont la même hauteur et la même profondeur (même surface S traversée par le flux de chaleur).

On note, T_0 et T_n , les températures qui règnent à chaque extrémité du système.



Flux de chaleur qui traverse le système : $\phi = \phi_1 = \dots = \phi_i = \dots = \phi_n$ (conservation du flux)

Exprimons le flux de chaleur qui traverse le mur i en s'inspirant de l'équation (2) :

$$\phi = \frac{e_i}{\lambda_i S} (T_{i-1} - T_i)$$

$$\Rightarrow T_0 - T_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} \phi; \quad T_1 - T_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \phi; \quad \dots; \quad T_{n-1} - T_n = \frac{e_n}{\lambda_n S} \phi$$

$$\Rightarrow T_0 - T_n = \phi \left(\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n S} \right) = \phi \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}$$

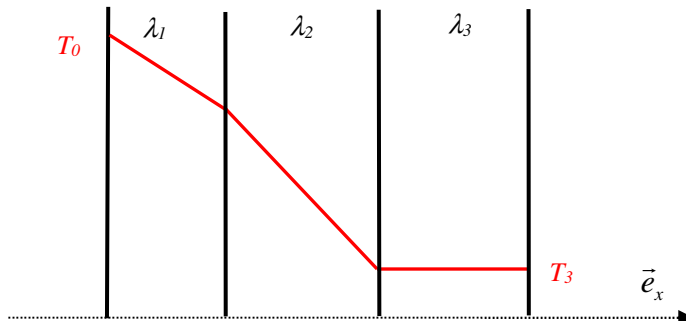
$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}}} \text{ (en W)}$$

La distribution de température $T(x)$ est linéaire dans chaque tronçon de mur.

Pour le mur i : $\boxed{T(x) - T_{i-1} = -\frac{\phi}{\lambda_i S} x}$ (voir équation (3))

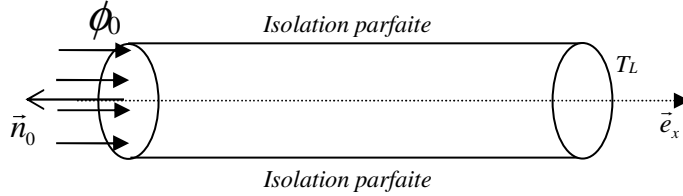
Le profil de température est linéaire, avec, pour un flux de chaleur fixé, une pente d'autant plus petite que λ_i est grand (les bons conducteurs uniformisent la température).

Dans l'exemple représenté ci-dessous : $\lambda_1 > \lambda_2$ et $\lambda_3 \rightarrow \infty$.



3) Conduction dans un barreau

On considère un barreau cylindrique de longueur L et de section S , composé d'un matériau homogène de conductivité thermique λ supposée constante. Ce barreau est chauffé à l'une de ses extrémités par effet Joule et est refroidi à l'autre extrémité à une température donnée (par exemple en faisant circuler un liquide de refroidissement). On suppose le régime stationnaire atteint.



On suppose que le barreau est parfaitement isolé sur sa surface latérale (donc pas d'échange de chaleur avec l'extérieur à travers cette surface). On va donc pouvoir supposer que le flux de chaleur ne se propage que dans la direction axiale \vec{e}_x (flux unidirectionnel). La température à l'intérieur du barreau ne dépend alors que d'une seule variable d'espace, x : $T = T(x)$.

$$\begin{aligned} \text{L'équation de la chaleur s'écrit : } \nabla^2 T &= \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{dT}{dx} = Cste = A \\ & & \Leftrightarrow & T(x) = A x + B \end{aligned}$$

La distribution de température à l'intérieur du barreau est donc linéaire. La détermination des 2 constantes A et B nécessite la connaissance de 2 conditions aux limites.

- détermination de A : en $x = 0$, on impose un flux de chaleur ϕ_0 ($T(x=0) = T_0$ inconnue):

$$\phi_0 = \iint_S -\vec{\varphi}_0 \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{\varphi}_0 \cdot \vec{e}_x \, dS \quad \text{avec} \quad \vec{\varphi}_0 = -\lambda \vec{\nabla} T \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \vec{e}_x$$

$$\text{et } \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = A \Rightarrow \phi_0 = \iint_S -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \, dS = \iint_S -\lambda A \, dS = -\lambda S A \Rightarrow \boxed{A = \frac{-\phi_0}{\lambda S}}$$

- détermination de B : en $x = L$, on impose la température $T(x=L) = T_L$:

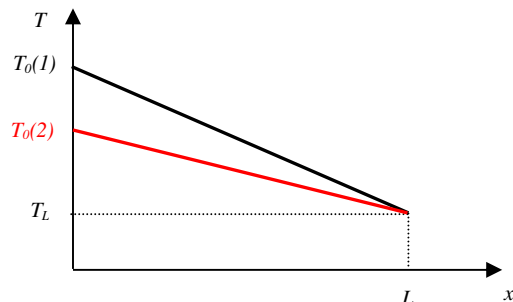
$$\Rightarrow T(x=L) = \frac{-\phi_0}{\lambda S} L + B = T_L \Rightarrow B = \frac{\phi_0}{\lambda S} L + T_L$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) - T_L = \frac{\phi_0}{\lambda S} (L - x)}$$

On peut alors déterminer la température du barreau en $x = 0$: $T_0 - T_L = \frac{\phi_0}{\lambda S} L$.

Lorsque T_L est fixée, la température T_0 est d'autant plus élevée que le flux imposé ϕ_0 est important (la pente est plus élevée).

Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé 2 profils de température correspondant à 2 flux de chaleur différents : $\phi_0(1) > \phi_0(2)$, T_L étant fixée.



4) Problèmes à symétrie de révolution

Pour ce type de problème, on se place en général dans un système de coordonnées cylindriques. L'opérateur Laplacien s'exprime alors par :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dans les problèmes à symétrie de révolution : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. Par ailleurs, dans les problèmes abordés dans ce cours, on supposera que $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, ce qui reviendra à se ramener à un problème unidirectionnel où le flux de chaleur se propage uniquement dans la direction \vec{e}_r (flux radial) et la température ne dépend que de r : $T(r, \theta, z) = T(r)$.

On considère un cylindre constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante. On suppose que la hauteur du cylindre est très grande devant son diamètre de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel. L'équation de la chaleur dans le cas où il n'y a **pas de dissipation** s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 & \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = A \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \\ & \Rightarrow \boxed{T(r) = A \ln(r) + B} \end{aligned}$$

2 constantes A et B sont à déterminer, ce qui nécessite l'écriture de 2 conditions aux limites.

a. Cylindre plein de rayon R : $0 \leq r \leq R$

Pour $r \rightarrow 0$, $\ln(r) \rightarrow -\infty \Rightarrow T(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$, ce qui est physiquement impossible $\Rightarrow A = 0$.

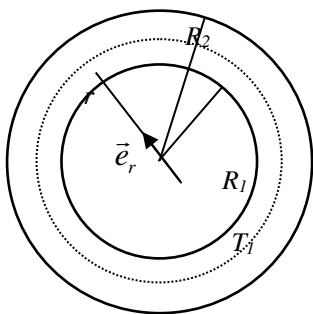
$\Rightarrow T(r) = B = T(R) \quad \forall r \Rightarrow$ cylindre isotherme

b. Cylindre creux de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 :

$$T(r) = A \ln(r) + B \quad \text{avec} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Notons T_1 et T_2 les températures régnant sur les faces intérieure et extérieure du cylindre :

$$\begin{cases} T_1 = T(R_1) = A \ln(R_1) + B \\ T_2 = T(R_2) = A \ln(R_2) + B \end{cases}$$



$$T_2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \quad \text{et} \quad B = \frac{T_1 \ln(R_2) - T_2 \ln(R_1)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\boxed{T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + T_1} \quad (1b)$$

- Déterminons la densité de flux de chaleur qui traverse le cylindre en r quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = \varphi_r \vec{e}_r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi_r = \vec{\varphi} \cdot \vec{e}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{A}{r}} \quad (\text{en } W/m^2) \quad \varphi_r > 0 \text{ ou } \varphi_r < 0$$

Remarque : la densité de flux dépend de r , contrairement au cas du mur plan.

Le flux de chaleur traversant une hauteur H de cylindre pour un r quelconque :

$$\phi = \iint_S \varphi_r dS \quad (\text{en } W)$$

avec $dS = r d\theta dz \Rightarrow \phi = \int_0^{2\pi} \int_0^H \varphi_r r d\theta dz = r \varphi_r 2\pi H = -2\pi H \lambda A$

$$\boxed{\phi = 2\pi H \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

On constate que le flux de chaleur ne dépend pas de r , ce qui implique notamment que le flux qui traverse la frontière en $r = R_1$ est égal au flux qui traverse la frontière en $r = R_2$, vérifiant ainsi la conservation du flux dans le cas du régime permanent sans dissipation. En revanche, la densité de flux dépend de r , car la surface traversée par le flux dépend de r . Pour assurer la conservation du flux total, la densité de flux sera ainsi plus élevée en $r = R_1$ qu'en $r = R_2$.

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$\boxed{\phi = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) / (2\pi \lambda H)}} \quad (2b)$$

Et (1b) peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{T(r) = \frac{-\phi}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + T_1} \quad (3b)$$

- ❖ Si les faces intérieure et extérieure du cylindre sont à température imposée, alors la combinaison des équations (2b) et (3b) détermine complètement la distribution de température à l'intérieur du mur et les flux de chaleur aux frontières seront calculés par l'équation (2b).

Les flux aux frontières du point de vue du mur :

• en $r = R_1$: $\vec{n} = -\vec{e}_r \Rightarrow \varphi_{R_1} = -\vec{\varphi}|_{r=R_1} \cdot \vec{n} = \vec{\varphi}|_{r=R_1} \cdot \vec{e}_r$

avec $\vec{\varphi}|_{r=R_1} = -\lambda \vec{\nabla} T|_{r=R_1} = -\lambda \frac{dT}{dr}|_{r=R_1} \vec{e}_r \quad \boxed{\varphi_{r=R_1} = -\lambda \frac{dT}{dr}|_{r=R_1} = -\lambda \frac{A}{R_1}}$

On vérifie bien que φ_{R_1} est positif (entrant) lorsque $T_1 > T_2$ (la chaleur se propage du chaud vers le froid).

- en $r = R_2$: $\vec{n} = \vec{e}_r \Rightarrow \phi_{R_2} = -\vec{\phi}|_{r=R_2} \cdot \vec{n} = \vec{\phi}|_{r=R_2} \cdot \vec{e}_r$

avec
$$\vec{\phi}|_{r=R_2} = -\lambda \vec{\nabla} T|_{r=R_2} = -\lambda \frac{dT}{dr}|_{r=R_2} \vec{e}_r \quad \boxed{\phi_{r=R_2} = \lambda \frac{dT}{dr}|_{r=R_2} = \lambda \frac{A}{R_2}}$$

On vérifie bien que ϕ_{R_2} est négatif (sortant) lorsque $T_1 > T_2$.

5) Résistance thermique – Analogie électrique

D'après les résultats établis au paragraphe précédent, on constate que les expressions des flux de chaleur qui traversent un milieu par conduction ou qui sont échangés par convection peuvent se mettre sous la forme :

$$\boxed{\phi = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}}$$

- **pour le mur plan :**
$$\phi = \frac{T_0 - T_e}{\frac{e}{\lambda S}} \Rightarrow \boxed{R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S}}$$

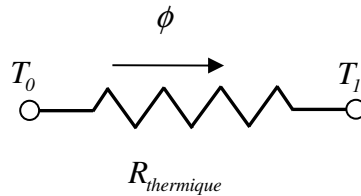
- **pour le cylindre creux :**
$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) / (2 \pi \lambda H)} \Rightarrow \boxed{R_{thermique} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2 \pi \lambda H}}$$

- **pour le flux convectif :**
$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \Rightarrow \boxed{R_{thermique} = \frac{1}{h S}}$$

La résistance thermique représente ainsi la résistance du milieu soumis à un écart de température donné, à laisser se propager un flux de chaleur. Pour un ΔT donné, le flux de chaleur qui traverse le milieu sera d'autant plus petit que la résistance est grande. Ainsi par exemple pour le cas du mur, on voit que plus le milieu est isolant (λ faible), plus la résistance est grande et donc plus le flux est petit. Lorsque l'on traitera d'un problème d'*isolation thermique*, on cherchera donc à augmenter la résistance du système. En revanche, lorsque l'on cherchera à *améliorer les transferts* de chaleur (refroidissement de systèmes, échangeurs...) on cherchera à diminuer la résistance du système (en augmentant h par exemple).

Analogie électrique

L'expression du flux ainsi écrite présente une certaine analogie avec la loi d'Ohm en électricité : $I = \frac{U}{R}$. Le flux de chaleur joue le rôle du courant électrique (flux d'électrons), la différence de température qui donne naissance au flux de chaleur joue le rôle de la différence de potentiel qui donne naissance au courant électrique. Ainsi, pour représenter un problème thermique, on pourra adopter la méthode des schémas électrique équivalents du type :

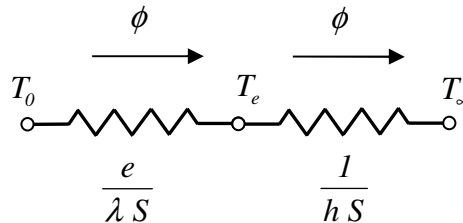


On pourra également appliquer les mêmes lois de composition qu'en électricité (circuits séries ou parallèles) lorsque l'on sera confronté à un système mettant en jeu plusieurs milieux et plusieurs types de flux.

Exemple: un mur plan est soumis à un flux de convection sur l'une de ses faces (traité au paragraphe II.2).

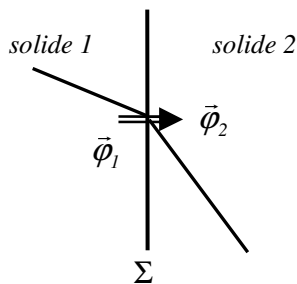
$$\phi = \frac{T_0 - T_\infty}{\left(\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{hS}\right)} \Rightarrow R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{hS}$$

⇒ le schéma électrique équivalent est le suivant :



6) Résistance de contact entre deux solides

- si le contact est parfait :



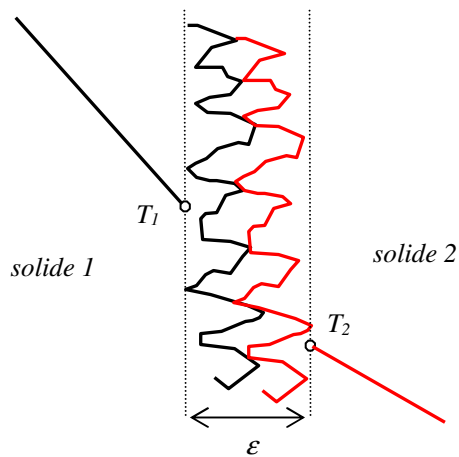
- continuité du flux à la traversée de l'interface :

$$\lambda_1 \frac{dT}{dx} \Big|_{\Sigma^-} = \lambda_2 \frac{dT}{dx} \Big|_{\Sigma^+}$$

- continuité des températures à l'interface :

$$T_1 = T_2$$

- si le contact est **imparfait** (rugosités à l'échelle microscopique, défauts géométriques...). La surface réelle de contact ne représente alors que quelques pourcents de la surface totale. La densité de flux de chaleur peut alors être localement très grande.



L'interface est définie sur une épaisseur ε .

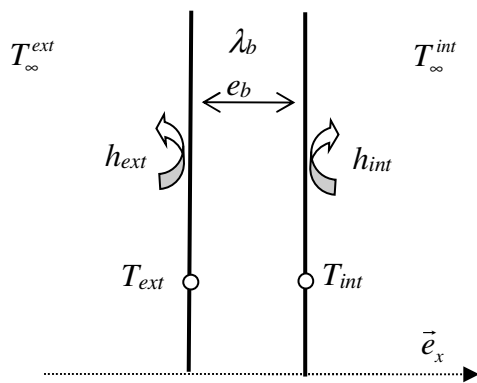
- continuité du flux à la traversée de l'interface :
- discontinuité apparente des températures à l'échelle macroscopique.

Ainsi tout se passe comme s'il existait une résistance thermique entre les deux solides, appelée **résistance de contact**. Le saut de température à la traversée de l'interface est :

$$\Delta T_{\Sigma} = T_1 - T_2 = R_c \phi$$

ex : l'air immobile emprisonné dans les anfractuosités de l'interface agit comme un très bon isolant, ce qui se traduira par une résistance de contact élevée.

Exercice d'application : isolation d'un mur



On considère un mur en béton, de conductivité thermique λ_b et d'épaisseur e_b , en contact sur une de ses faces avec un milieu à la température T_{∞}^{int} (intérieur d'une pièce d'habitation par exemple), l'autre face étant en contact avec un milieu à la température T_{∞}^{ext} (l'extérieur).

Les échanges de chaleur entre le mur et son milieu environnant se produisent par convection, dus au vent à l'extérieur et aux mouvements de l'air dans la pièce. On définit les coefficients d'échange convectifs :

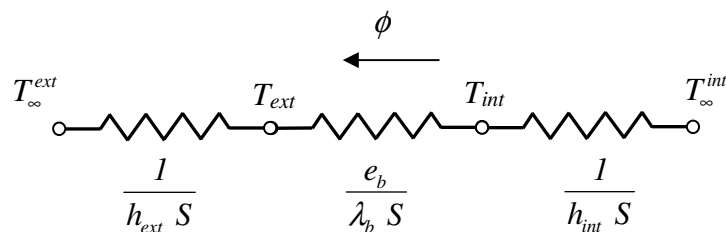
h_{int} caractérisant les échanges avec la pièce
 h_{ext} caractérisant les échanges avec l'extérieur

Données : $T_{\infty}^{int} = 20^{\circ}\text{C}$; $T_{\infty}^{ext} = -5^{\circ}\text{C}$; $h_{int} = 5 \text{ W/m}^2/\text{K}$; $h_{ext} = 10 \text{ W/m}^2/\text{K}$; $\lambda_b = 2 \text{ W/m/K}$; $e_b = 10 \text{ cm}$

Calcul du flux de chaleur qui traverse le mur (de l'intérieur vers l'extérieur car la pièce est plus chaude que l'extérieur) pour une surface d'échange $S = 1 \text{ m}^2$:

$$\phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{T_{\infty}^{int} - T_{\infty}^{ext}}{R}$$

- Schéma électrique équivalent :



- Résistance équivalente :

$$R = \frac{1}{h_{int}S} + \frac{e_b}{\lambda_b S} + \frac{1}{h_{ext}S}$$

Application numérique : $R = 0.35 \text{ K/W}$,

$$\phi = 70 \text{ W}$$

Calcul de la température du mur à l'intérieur de la pièce :

$$\phi = h_{int}S(T_{\infty}^{int} - T_{int}) \Rightarrow T_{\infty}^{int} - T_{int} = \frac{\phi}{h_{int}S}$$

Application numérique : $T_{\infty}^{int} - T_{int} = 14^{\circ}\text{C} \Rightarrow T_{int} = 6^{\circ}\text{C} !!$

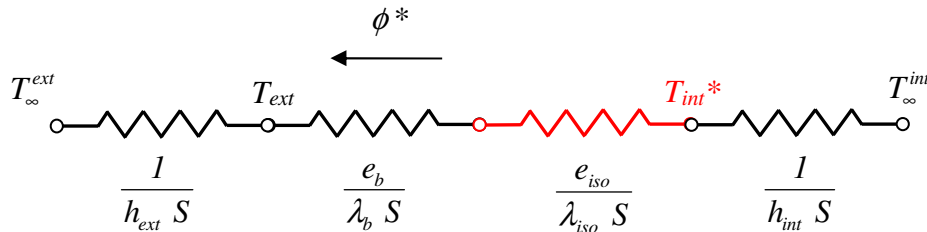
Rq : dans ce cas, même si l'air dans la pièce se trouve à 20°C , la température ressentie par une personne se trouvant dans la pièce sera beaucoup plus basse, dû aux échanges de chaleur par rayonnement entre le corps et les murs.

On rajoute une couche d'isolant (laine de verre) de conductivité thermique $\lambda_{iso} = 0.04 \text{ W/m/K}$ et d'épaisseur $e_{iso} = 10 \text{ cm}$.

Calcul du flux de chaleur qui traverse le mur pour une surface d'échange $S = 1 \text{ m}^2$.

$$\phi^* = \frac{\Delta T}{R^*} = \frac{T_{\infty}^{int} - T_{\infty}^{ext}}{R^*} \Rightarrow \Delta T = R^* \phi^* = R \phi \Rightarrow \phi^* = \frac{R}{R^*} \phi$$

- Schéma électrique équivalent :



- Résistance équivalente : $R^* = R + \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso} S}$

Application numérique : $R^* = 2.85 \text{ K/W} \Rightarrow \frac{R^*}{R} = 8,1 \quad \phi^* = 8.6 \text{ W}$

Calcul de la température du mur à l'intérieur de la pièce :

$$T_{\infty}^{int} - T_{int}^* = \frac{\phi^*}{h_{int} S} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{\infty}^{int} - T_{int}^*}{T_{\infty}^{int} - T_{int}} = \frac{\phi^*}{\phi}$$

Application numérique : $T_{\infty}^{int} - T_{int}^* = 1.7^{\circ}\text{C} \Rightarrow T_{int} > 18^{\circ}\text{C} !!$

III. Conduction en régime permanent avec dissipation interne de chaleur

1) Equation de la chaleur

On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable et on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur établie précédemment :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + P$$

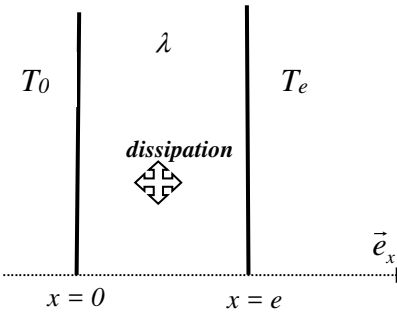
• En régime stationnaire (permanent) : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (le terme d'accumulation est nul) $\Rightarrow T(x, y, z)$

$$\boxed{\nabla^2 T = -\frac{P}{\lambda}} \quad \text{dans } (\mathcal{V})$$

2) Le problème du mur avec dissipation interne

On considère un mur constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante, d'épaisseur e . On suppose que la hauteur et la profondeur du mur sont très grandes devant son épaisseur de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel. Ce mur est soumis à une dissipation volumique de chaleur P . Le flux de chaleur se propagera dans une

seule direction (suivant x par exemple) et la température à l'intérieur du mur ne dépendra que d'une seule variable d'espace : $T = T(x)$.



$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-P}{\lambda}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-P}{\lambda} x + A$$

$$\Leftrightarrow \quad T(x) = \frac{-P}{2\lambda} x^2 + A x + B$$

Le profil de température est parabolique et admet un extremum en $x^* = A \frac{\lambda}{P}$ (pour $\frac{dT}{dx} = 0$).

On note : $T_0 = T(x=0)$ et $T_e = T(x=e)$

$$T(0) = B = T_0 \text{ et } T(x=e) = \frac{-P}{2\lambda} e^2 + A e + T_0 = T_e \Rightarrow A = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{P}{2\lambda} e$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(x) = \frac{-P}{2\lambda} (x^2 - e x) + (T_e - T_0) \frac{x}{e} + T_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\theta(X) = \frac{T(x) - T_0}{T_e - T_0} = \frac{-P e^2}{2\lambda(T_e - T_0)} (X^2 - X) + X} \quad \text{où } X = \frac{x}{e}.$$

L'extremum de température est atteint en $x^* = A \frac{\lambda}{P} = \frac{e}{2} + \frac{\lambda}{P} \frac{T_e - T_0}{e}$.

- ❖ Déterminons la densité de flux de chaleur qui traverse le mur en x quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = -\lambda \left(\frac{-P}{\lambda} x + A \right) \vec{e}_x = (Px - \lambda A) \vec{e}_x = \varphi_x \vec{e}_x$$

$$\varphi_x = P \left(x - \frac{e}{2} \right) + \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \text{ (en } W/m^2 \text{)}$$

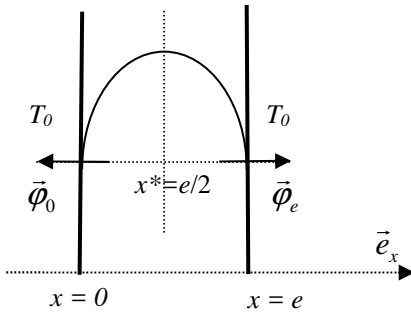
φ_x dépend de x et on vérifie bien que $\varphi_{x^*} = 0$.

Le flux de chaleur traversant la surface du mur pour un x quelconque s'écrit :

$$\boxed{\phi_x = \iint_S \varphi_x dS = PS \left(x - \frac{e}{2} \right) + \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e}} \quad \text{(en W)}$$

où $S = \text{Hauteur} \times \text{Profondeur du mur} = S$ surface du mur (dans les directions z et y).

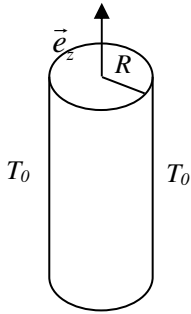
ϕ_x dépend de x et $\phi_{x^*} = 0$.



Dans le cas où $T_0 = T_e$ on a $x^* = \frac{e}{2}$ et $\varphi_x = P \left(x - \frac{e}{2} \right)$ ainsi

$$\varphi_0 = -P \frac{e}{2} < 0 \text{ et } \varphi_e = P \frac{e}{2} > 0.$$

3) Problèmes à symétrie de révolution



On considère un cylindre de rayon R constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante. On suppose que la hauteur du cylindre est très grande devant son diamètre de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel. L'équation de la chaleur dans le cas où il y a de la dissipation s'écrit alors :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{P}{\lambda} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{-P}{2\lambda} r + \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{-P}{4\lambda} r^2 + A \ln(r) + B$$

2 constantes A et B sont à déterminer, ce qui nécessite l'écriture de 2 conditions aux limites.

a) Cas du cylindre plein : $0 \leq r \leq R$ (ex : dissipation dans un fil électrique)

- Si $r \rightarrow 0$ alors $\frac{dT}{dr} \rightarrow +\infty$ ce qui n'est physiquement pas admissible. On doit donc avoir : $A = 0$.
- En $r = R$: $T(R) = \frac{-P}{4\lambda} R^2 + B = T_0 \Rightarrow B = T_0 + \frac{P}{4\lambda} R^2$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0$$

❖ Déterminons la densité de flux de chaleur qui traverse le mur en r quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = -\lambda \left(\frac{-P}{2\lambda} r \right) \vec{e}_r = \frac{P}{2} r \vec{e}_r = \varphi_r \vec{e}_r$$

$$\varphi_r = \frac{P}{2} r \text{ (en } W/m^2 \text{)}$$

$$\varphi_r \text{ dépend de } r : \quad \text{en } r = 0 \quad \varphi_{r=0} = 0$$

$$\text{en } r = R \quad \varphi_R = \frac{P}{2} R$$

Le flux de chaleur traversant la surface du mur pour un r quelconque s'écrit :

$$\phi_r = \iint_S \varphi_r dS = \int_0^{2\pi} \int_0^H \varphi_r r d\theta dz$$

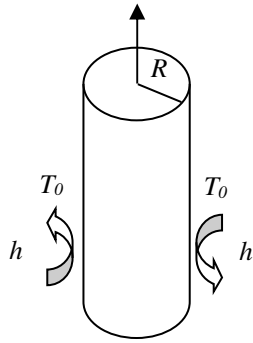
$$\boxed{\phi_r = \pi r^2 H P} \text{ (en W)}$$

où H est la hauteur du cylindre sur laquelle on calcule le flux.

En $r = R$:

$$\boxed{\phi_R = \pi R^2 H P}$$

➤ Si T_0 résulte d'un échange convectif avec le fluide environnant :



Conservation du flux de chaleur à l'interface :

Flux de chaleur par arrivant à l'interface par conduction dans le solide = Flux de chaleur évacué par convection dans le fluide.

$$\phi_R = h S (T_0 - T_\infty) \quad \text{avec} \quad S = 2\pi R H$$

$$\Rightarrow \pi H P R^2 = h 2\pi R H (T_0 - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 - T_\infty = \frac{P R}{2 h}}$$

IV. Les Ailettes

Les ailettes sont de bons conducteurs de la chaleur dont une dimension est grande par rapport aux autres. Elles sont utilisées pour améliorer l'évacuation de la chaleur d'un système solide confiné dans lequel les densités de flux de chaleur sont élevées.



Résistances chauffantes à ailettes.



Tube à ailettes (radiateur).



Dissipateurs thermiques.



Moteur de moto.

Figure 1 : Exemples de systèmes à ailettes utilisés dans différents secteurs d'applications.

Considérons le mur plan de la Figure 2 (a). Le flux de chaleur évacué du mur par convection s'exprime par la loi de Newton :

$$\phi_{conv} = h S_{ech} (T_p - T_\infty)$$

Si T_p est fixée, il y a deux possibilités pour augmenter le flux de chaleur évacué :

- Augmenter le coefficient d'échange convectif, h , en augmentant la vitesse de l'écoulement et/ou diminuer la température du fluide T_∞ . Dans la plupart des applications, augmenter h au maximum ne suffit pas pour évacuer le flux de chaleur souhaité et bien souvent le coût est trop élevé (installation de pompes ou ventilateurs puissants et encombrants). Réduire T_∞ est bien souvent infaisable dans l'installation.
- La deuxième solution est beaucoup plus simple à mettre en œuvre : il s'agit d'**augmenter la surface d'échange**, S_{ech} , en utilisant des ailettes s'étendant à partir du solide dans le milieu environnant (voir Figure 2 (b)). La conductivité thermique du matériau constituant l'ailette doit être élevée afin de minimiser les gradients de température entre la base et l'extrémité de l'ailette.

L'augmentation du flux de chaleur sera maximale si l'ailette est à température uniforme à T_p (conductivité infinie).

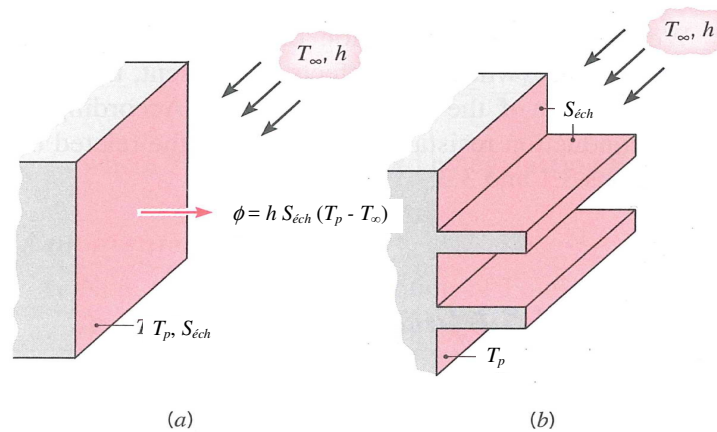


Figure 2 : Utilisation d'ailettes pour augmenter le flux de chaleur évacué du mur : (a) mur plan, (b) mur muni d'ailettes.

Dans les paragraphes précédents, le transfert de chaleur par conduction dans le solide et le transfert de chaleur par convection à partir de ses frontières se produisait dans la même direction. Dans les systèmes avec ailettes, la direction du flux de chaleur convectif est perpendiculaire à la direction principale du flux de chaleur dans le solide.

Il existe plusieurs configurations d'ailettes (voir figure ci-dessous), dont le choix, dans la pratique, est conditionné par de nombreux critères : l'espace disponible dans le système, le poids, la facilité de fabrication, les coûts... Il faut également prendre en compte la perturbation de l'écoulement engendrée par la présence des ailettes (pertes de charge).

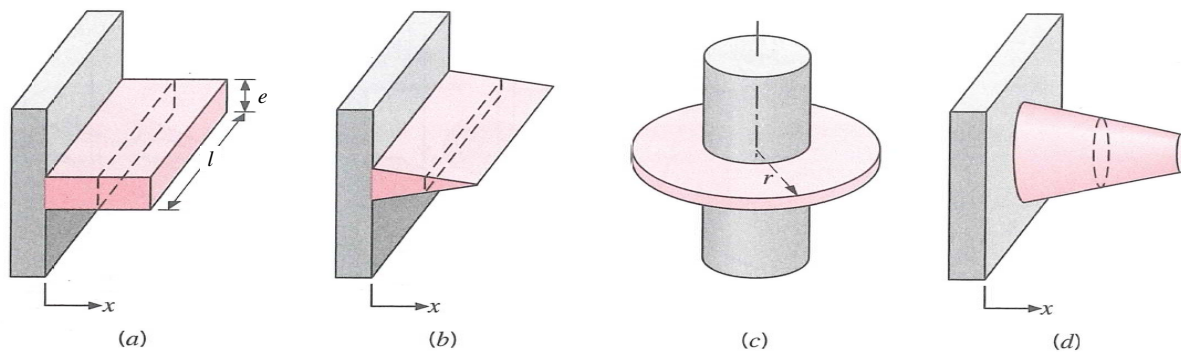


Figure 3 : différents types d'ailettes : (a) ailette droite à section constante, (b) ailette droite à section variable, (c) ailette annulaire, (d) ailette en forme d'aiguille à section variable.

1) L'équation de la chaleur pour des ailettes à section constante

On cherche à déterminer dans quelle mesure la présence d'ailettes peut améliorer le transfert de chaleur d'une surface d'un solide vers le fluide environnant. Considérons l'ailette de section constante schématisée sur la figure Figure 4, de longueur L , baignant dans un fluide en mouvement à la température T_∞ . Pour quantifier le transfert de chaleur associé à cette ailette nous devons tout d'abord déterminer la distribution de température le long de l'ailette à partir d'un bilan d'énergie que nous allons établir en posant les hypothèses suivantes :

- Le régime est permanent et il n'y a pas de dissipation interne de chaleur.
- La conductivité thermique de l'ailette, λ , est constante.
- Le coefficient d'échange convectif, h , est uniforme sur toute la surface de l'ailette.
- On néglige le transfert de chaleur par rayonnement.

- Le problème est monodimensionnel, c'est-à-dire que le flux de chaleur ne se propage que dans une seule direction (la direction x). On considère ainsi que la température est uniforme dans une section de l'ailette en x donné ($T = T(x)$), ce qui est généralement assuré par l'utilisation d'ailettes fines.

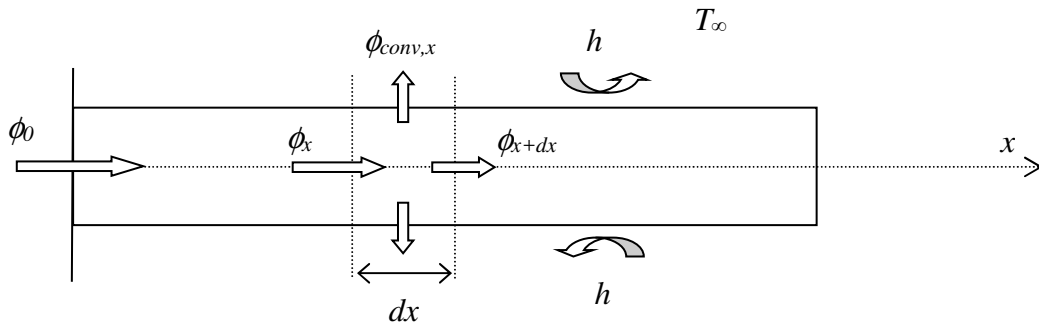


Figure 4 : Bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx .

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué d'une tranche de l'ailette comprise entre x et $x + dx$:

$$\phi_x = \phi_{x+dx} + \phi_{conv}$$

- ϕ_x flux de chaleur transmis par conduction en x : $\phi_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x$
- ϕ_{x+dx} flux de chaleur transmis par conduction en $x + dx$: $\phi_{x+dx} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx}$
- $\phi_{conv,x}$ flux évacué par convection à la frontière entre x et $x + dx$: $\phi_{conv,x} = h p dx (T(x) - T_\infty)$

où : S est l'aire de la section de passage du flux de conduction.

p est le périmètre de l'ailette (périmètre d'échange du flux convectif).

$$\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = h p dx (T(x) - T_\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = \frac{h p}{\lambda S} dx (T(x) - T_\infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} dx = \frac{h p}{\lambda S} dx (T(x) - T_\infty)$$

$$\text{car } \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = d \left(\frac{dT}{dx} \right) = \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{h p}{\lambda S} (T(x) - T_\infty)} \quad \text{Eq. IV.1}$$

Le champ de température dans l'ailette, $T(x)$, est ainsi déterminé par la résolution de cette équation (parfois appelée équation de la barre) associée à deux conditions aux limites, écrites à la base et à l'extrémité de l'ailette.

Remarque : si la section de l'ailette n'est pas constante : $S = S(x)$ et $p = p(x)$. L'équation de bilan s'écrit alors :

$$\left(S \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(S \frac{dT}{dx} \right)_x = \frac{h}{\lambda} p(x) dx (T(x) - T_\infty) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(S \frac{dT}{dx} \right) = \frac{h}{\lambda} p(x) (T(x) - T_\infty)$$

Posons $\theta(x) = (T(x) - T_\infty)$ et $m^2 = \frac{h p}{\lambda S}$ où m est le module de l'ailette. L'équation IV.1 devient :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \text{Eq. IV.2}$$

- h coefficient d'échange convectif ($W.m^{-2}.K^{-1}$).
- λ conductivité thermique du matériau constituant l'ailette ($W.m^{-1}.K^{-1}$).
- S section de l'ailette (m^2).
- p périmètre de l'ailette (m).

Pour une ailette rectangulaire d'épaisseur e et de largeur l : $S = e l$ et $p = 2(e + l)$.

Pour une ailette cylindrique de rayon R : $S = \pi R^2$ et $p = 2\pi R$.

L'équation différentielle IV.2, d'ordre 2 linéaire et homogène à coefficients constants, admet une solution générale de la forme :

$$\theta(x) = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x} \quad \text{Eq. IV.3}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = m(C_1 e^{m x} - C_2 e^{-m x})$$

Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (EDL2) $\theta'' - m^2 \theta = 0$ (« '' » se réfère à la dérivée seconde par rapport à x). La solution d'une EDL du premier ordre à coefficients constants (EDL1) $\theta' - a\theta = 0$ (« ' » se réfère à la dérivée première par rapport à x et a constante réelle) est de la forme $\theta(x) = K e^{a x}$ (K constante). On cherche s'il existe des solutions de l'EDL2 ayant la même forme que celles d'une EDL1, c.a.d. de la forme $e^{\alpha x}$. L'EDL2 s'écrira dans ce cas $\theta'' - m^2 \theta = \alpha^2 e^{\alpha x} - m^2 e^{\alpha x} = 0 \quad \forall x \Leftrightarrow \alpha^2 - m^2 = 0$ (équation caractéristique) $\Leftrightarrow \alpha = \pm m$ avec dans notre cas m réel. Ainsi $e^{m x}$ et $e^{-m x}$ sont solutions de l'équation. Toute combinaison linéaire de ces solutions est également solution. La forme générale de la solution de l'EDL2 est donc $\theta(x) = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x}$ (C_1 et C_2 constantes).

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions aux limites à la base et l'extrémité de l'ailette.

- A la base de l'ailette ($x = 0$) : $\theta(0) = (T(0) - T_\infty) = (T_0 - T_\infty) = \theta_0$

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_0 \quad \text{Eq. IV.4}$$

- A l'extrémité de l'ailette ($x = L$) : plusieurs cas peuvent être considérés :

a. température imposée à l'extrémité (condition aux limites de type Dirichlet) :

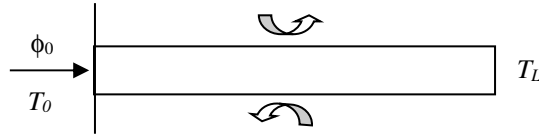
$$\theta(L) = (T(L) - T_\infty) = (T_L - T_\infty) = \theta_L$$

cas particulier : **ailette infiniment longue** : $T(L) \approx T_\infty \Rightarrow \theta(L) \approx 0$.

b. ailette soumise à un flux de chaleur convectif à son extrémité (condition aux limites de type Neumann).

cas particulier : **ailette isolée thermiquement** (condition d'adiabaticité).

2) Flux de chaleur évacué par une ailette infiniment longue et de section constante S_0



Pour une ailette de longueur « infinie », la température à l'extrémité sera égale à la température du milieu environnant, T_∞ . Ainsi $\theta_L \rightarrow 0$ si $L \rightarrow \infty$. La condition aux limites en $x = L$ s'écrit alors :

$$\theta(L) = \theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Eq. IV.5}$$

$$\Leftrightarrow C_1 \rightarrow 0$$

La condition aux limites en $x = 0$ (Eq. IV.4) s'écrit alors : $C_2 = \theta_0$.

Le champ de température à l'intérieur de l'ailette est donné par l'équation IV.3 avec $C_1 = 0$ et $C_2 = \theta_0$:

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\theta_0} = e^{-mx}} \quad \text{Eq. IV.6}$$

❖ Le flux de chaleur évacué du solide par l'ailette, ϕ_0 , devient:

$$\phi_0 = -\lambda S_0 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S_0 \theta_0 \left(\frac{d\theta/\theta_0}{dx} \right)_{x=0} = \lambda S m \theta_0$$

En remplaçant m par son expression ($m = \sqrt{\frac{h p}{\lambda S_0}}$), on obtient :

$$\boxed{\phi_0 = \sqrt{h \lambda S_0 p} \theta_0} \quad \text{Eq. IV.7}$$

On peut donc introduire une résistance thermique de l'ailette infinie, R , telle que :

$$\phi_0 = \frac{(T_0 - T_\infty)}{R} = \frac{\theta_0}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\lambda S m} = \frac{1}{\sqrt{h \lambda S_0 p}}}$$

➤ Sous quelle condition peut-on considérer que l'approximation $L \rightarrow \infty$ est valide ?

Dans la pratique, l'hypothèse $L \rightarrow \infty$ sera considérée valide si $\frac{\theta_L}{\theta_0} < 0.01 (=1\%)$, soit

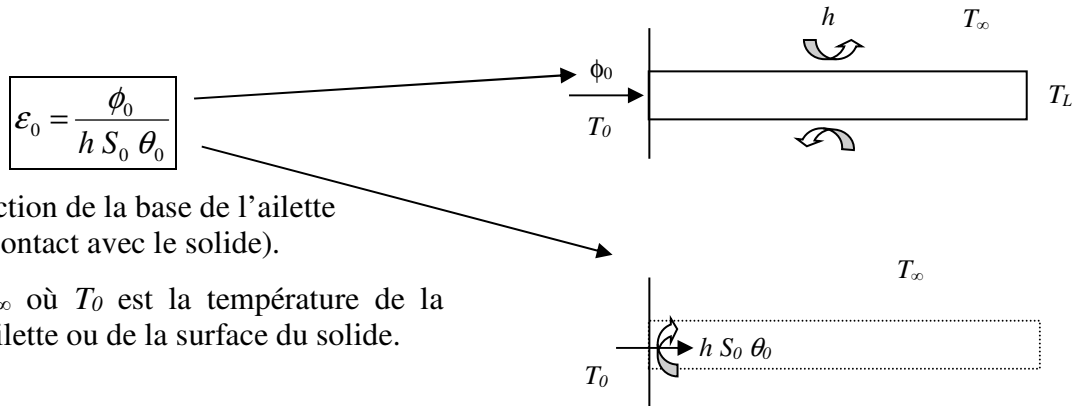
$$mL \geq 2 \ln(10) \text{ ou } \boxed{L \geq \frac{4.6}{m}} \text{ avec } m = \sqrt{\frac{h p}{\lambda S_0}}.$$

Exemple : barreau cylindrique en Cuivre, en Aluminium ou en Acier (traité en cours).

3) Efficacité et rendement d'une ailette

Rappelons que les ailettes sont utilisées pour augmenter le flux de chaleur transféré du solide vers l'environnement. On notera cependant que l'ailette elle-même possède une résistance thermique. On pourrait ainsi se trouver dans le cas où, si l'ailette n'est pas correctement dimensionnée, sa présence ne contribuera pas à l'augmentation du transfert.

On définit l'efficacité d'une ailette comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par l'ailette, ϕ_0 , et le flux de chaleur qui serait évacué sans ailette :



- S_0 est la section de la base de l'ailette (en $x = 0$, contact avec le solide).
- $\theta_0 = T_0 - T_\infty$ où T_0 est la température de la base de l'ailette ou de la surface du solide.

❖ Dans le cas de l'ailette « infinie », l'efficacité s'écrit :

$$\varepsilon_{0,\infty} = \frac{\sqrt{h \lambda S_0 p} \theta_0}{h S_0 \theta_0} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{0,\infty} = \sqrt{\frac{\lambda p}{h S_0}}}$$

L'efficacité d'une ailette est avérée si $\varepsilon_0 \geq 1$. Ainsi l'efficacité de l'ailette est améliorée par :

- le choix d'un matériau de conductivité élevée.
- le choix de la géométrie de l'ailette, telle que $\frac{p}{S_0}$ élevé (utilisation d'ailettes fines).
- le choix d'un coefficient d'échange convectif « relativement » peu élevé (tout en assurant un flux évacué ϕ_0 élevé). Ainsi l'utilisation d'ailettes sera plus justifiée dans le cas où le fluide en écoulement est un gaz plutôt que dans le cas d'un liquide, et lorsque le transfert de chaleur se produit par convection naturelle.

➤ Une autre mesure de la performance d'une ailette est fournie par le calcul du **rendement d'une ailette**. Celui-ci est défini comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par une ailette, ϕ_0 , et le flux de chaleur maximal que pourrait évacuer une ailette. Ce flux de chaleur maximal est atteint dans le cas où l'écart de température entre l'ailette et le fluide environnant est maximal c.a.d. lorsque l'ailette entière se trouve à la température de la base :

$$\phi_{\max} = h S_{ech}^{ailette} (T_0 - T_\infty) = h S_{ech}^{ailette} \theta_0$$

où $S_{ech}^{ailette}$ est la surface d'échange entre l'ailette et le fluide environnant.

Le rendement d'une ailette s'écrit alors :

$$\boxed{\eta_0 = \frac{\phi_0}{h S_{ech}^{ailette} \theta_0}} \quad 0 \leq \eta_0 \leq 1$$

Remarque : $S_{ech}^{aillette} = pL + S_0$ avec pour une ailette $S_0 \ll pL$ donc $\eta_{0,\infty} = \frac{\sqrt{h \lambda S_0 p} \theta_0}{h p L \theta_0} = \sqrt{\frac{\lambda S_0}{h p} \frac{1}{L}}$,

soit : $\boxed{\eta_{0,\infty} = \frac{1}{m L}}$.

Dans de nombreuses applications pratiques, l'analyse du comportement thermique d'un système muni d'ailettes devient complexe si les ailettes utilisées n'ont pas une section constante. L'obtention du champ de température dans l'ailette devient ardue et donc le calcul du flux de chaleur évacué par l'ailette compliqué. Des abaques ou des expressions analytiques du rendement, η_0 , et de la surface d'échange, $S_{ech}^{aillette}$, d'ailettes de forme courante sont alors disponibles dans la littérature, qui permettent de déterminer le flux de chaleur évacué par l'ailette, ϕ_0 , connaissant la température à la base de l'ailette, θ_0 .

4) Efficacité et rendement d'une surface munie d'ailettes

On définit l'efficacité d'une surface munie d'ailettes comme étant le rapport entre le flux de chaleur total évacué par le système avec ailettes, ϕ_T , et le flux de chaleur total qui serait évacué par convection sans ailette :

$$\boxed{\varepsilon_T = \frac{\phi_T}{h S_0^T \theta_0}}$$

où $S_0^T = N S_0 + S_{entre-ailettes}$ est la surface totale du système sans ailette en contact avec le fluide environnant, $S_{entre-ailettes}$ étant la surface entre les ailettes. Dans la pratique, on cherche bien sûr à concevoir un système pour lequel $\boxed{\varepsilon_T \geq 1}$.

ϕ_T = flux évacué par les ailettes + flux évacué par convection entre les ailettes

$$\phi_T = N \phi_0 + h S_{entre-ailettes} \theta_0$$

- ϕ_0 flux de chaleur évacué par 1 ailette.
- N nombre d'ailettes (toutes identiques, de section à la base, S_0) disposées sur la surface S_T .
- $\theta_0 = T_0 - T_\infty$ où T_0 est la température de la base de l'ailette ou de la surface du solide.

$$\begin{aligned} \phi_T &= N \phi_0 + h (S_0^T - N S_0) \theta_0 \\ &= N \varepsilon_0 h S_0 \theta_0 + h (S_0^T - N S_0) \theta_0 \\ &= h S_0^T \theta_0 + N h S_0 \theta_0 (\varepsilon_0 - 1) \end{aligned}$$

- ε_0 efficacité d'une ailette (voir paragraphe précédent).

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_T = 1 + N \frac{S_0}{S_0^T} (\varepsilon_0 - 1)}$$

➤ Une autre mesure de la performance d'une surface munie d'ailettes est fournie par le calcul du **rendement du système**. Celui-ci est défini comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par le système avec ailettes, ϕ_T , et le flux de chaleur total maximal :

$$\boxed{\eta_T = \frac{\phi_T}{h S_{ech}^T \theta_0}}$$

où $S_{ech}^T = N S_{ech}^{aillette} + S_{entre-ailettes}$ est la surface d'échange totale du système muni d'ailettes avec le fluide environnant.

$$\begin{aligned}
\phi_T &= N \phi_0 + h S_{\text{entre-aillettes}} \theta_0 = N \phi_0 + h (S_{\text{ech}}^T - N S_{\text{ech}}^{\text{aillette}}) \theta_0 \\
&= N \eta_0 h S_{\text{ech}}^{\text{aillette}} \theta_0 + h (S_{\text{ech}}^T - N S_{\text{ech}}^{\text{aillette}}) \theta_0 \\
&= h S_{\text{ech}}^T \theta_0 + N h S_{\text{ech}}^{\text{aillette}} \theta_0 (\eta_0 - 1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_T = 1 - N \frac{S_{\text{ech}}^{\text{aillette}}}{S_{\text{ech}}^T} (1 - \eta_0)}$$

Dans la pratique, connaissant η_0 à partir des abaques, on peut calculer η_T attaché au système étudié, puis accéder au flux de chaleur total évacué.

V. Conduction en régime variable dans un milieu à température uniforme – modèle du bloc isotherme.

1) Equation de la chaleur

Reprenons l'expression de l'équation de la chaleur sous forme globale (bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$ dans tout le volume (ϑ) du système) établie au paragraphe I pour un milieu homogène :

$$\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \iint_S -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{\vartheta} P d\tau$$

ou, de façon équivalente :

$$\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \phi + \phi_{PR}$$

ϕ représente le flux de chaleur échangé à travers la frontière du système et ϕ_{PR} la puissance calorifique dissipée à l'intérieur du système.

On suppose que la température est uniforme dans tout le volume (ϑ) (on reviendra plus loin sur les conditions de validité de cette approximation). Elle ne dépend donc que du temps t :

$$T(x, y, z, t) = T(t)$$

On suppose par ailleurs que ρ et c sont constants dans tout le volume. On peut donc écrire :

$$\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \rho c \frac{dT}{dt} \vartheta = m c \frac{dT}{dt}$$

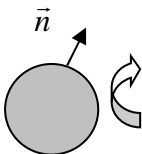
où m est la masse du système : $m = \rho \vartheta$.

L'équation de la chaleur pour le volume (ϑ) s'écrit :

$$\boxed{m c \frac{dT}{dt} = \iint_S -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{\vartheta} P d\tau}$$

Eq. V.1

2) La trempe d'une bille métallique



T_0

Ce processus consiste à immerger une bille initialement à la température T_i , dans un bain maintenu à température constante, $T_0 \neq T_i$.

On suppose que la température de la bille est uniforme, ce qui sera quasiment le cas si la bille est de petite taille et/ou si la conductivité thermique du matériau constituant la bille est élevée.

Dans ce problème, il n'y a pas de production interne de chaleur. L'équation V.1 s'écrit :

$$m c \frac{dT}{dt} = \phi \quad \text{Eq. V.2}$$

- le flux de chaleur échangé à travers la frontière est ici un flux convectif, régi par la loi de Newton. La densité de flux de chaleur s'écrit :

$$\vec{\varphi} = h (T_p^{bille}(t) - T_0) \vec{n}$$

La température de la bille étant uniforme, $T_p^{bille}(t) = T(t)$ sur toute la surface de la bille, S , et donc :

$$\phi = \iint_S -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS = -h S (T(t) - T_0)$$

L'équation de bilan V.2 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m c \frac{dT}{dt} &= -h S (T(t) - T_0) \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} &= -\frac{h S}{m c} (T(t) - T_0) \\ \Leftrightarrow \frac{d(T(t) - T_0)}{dt} &= -\frac{h S}{m c} (T(t) - T_0) \end{aligned}$$

On pose :

$$\tau = \frac{m c}{h S}$$

Ce groupement caractéristique a la dimension d'un temps : c'est la constante de temps du système, qui donne l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire du phénomène physique étudié.

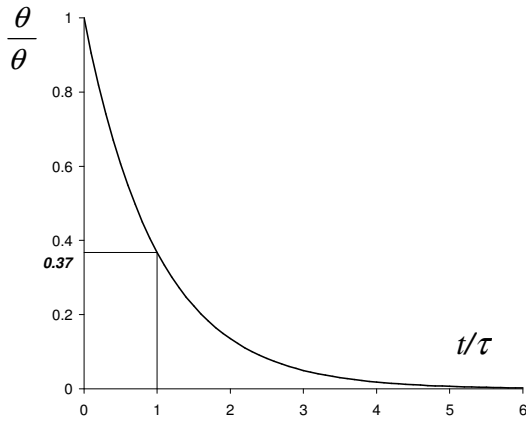
$$\text{On pose : } \theta(t) = (T(t) - T_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau} dt \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\text{Condition initiale : } \quad \text{à } t = 0, T = T_i \Rightarrow \quad K = T_i - T_0 = \theta_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta(t)}{\theta_i} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{Eq. V.3}$$

$$\text{Pour } t = \tau : \frac{\theta(\tau)}{\theta_i} = \exp(-1) = 0.3679$$

Cela signifie qu'à l'instant τ , l'écart entre la température de la bille et la température du milieu est égal à environ 37% de l'écart initial.



Aux temps très longs, c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow \infty$, on atteint le régime asymptotique :

$$\frac{\theta(t)}{\theta_i} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

La température de la bille tend vers la température du milieu dans lequel elle est plongée : le système bille + milieu est isotherme asymptotiquement (à l'équilibre).

En pratique, on considère qu'un système atteint la température du milieu extérieur lorsque $\frac{\theta}{\theta_i} = 1\%$ (= 0.01), ce qui correspond à un temps $-\frac{t_{asympt}}{\tau} = \ln 0.01 = -2 \ln(10)$, soit :

$$t_{asympt} = 2 \tau \ln(10) \approx 4.6 \tau$$

3) Validité de l'approximation du milieu à température uniforme – nombre de Biot

Le paramètre caractéristique du problème qui permet de vérifier la validité de l'approximation du milieu à température uniforme est un nombre sans dimension, appelé **nombre de Biot** défini comme étant le rapport entre deux résistances thermiques :

$$Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}}$$

$$R_{int} = \text{résistance interne (liée à la bille)} : R_{int} = \frac{\Delta T_{int}}{\phi_{int}}$$

$$\Rightarrow Bi = \frac{\phi_{ext}}{\phi_{int}} \frac{\Delta T_{int}}{\Delta T_{ext}} = \frac{\phi_{ext}}{\phi_{int}} \frac{T - T_p}{T_p - T_0}$$

$$R_{ext} = \text{résistance externe (liée au fluide)} : R_{ext} = \frac{\Delta T_{ext}}{\phi_{ext}}$$

Ainsi : $Bi \ll 1$ si $T \rightarrow T_p$: température uniforme dans le solide (très bons conducteurs).

En général, on considère que l'approximation est valide si **$Bi < 0.1$** .

$Bi \gg 1$ si $T_p \rightarrow T_0$: le fluide impose sa température à la surface du solide.

Soit δ la dimension caractéristique du système solide considéré (le rayon R pour une sphère) :

$$R_{int} = \text{résistance de conduction} : R_{int} = \frac{\delta}{\lambda S}$$

$$R_{ext} = \text{résistance de convection} : R_{ext} = \frac{1}{h S}$$

$$\Rightarrow Bi = \frac{h \delta}{\lambda}$$

Remarque : dans le paragraphe précédent, le modèle de l'ailette a consisté à considérer la température uniforme dans une section de l'ailette, ce qui correspondrait à un nombre de Biot calculé sur la demi-épaisseur de l'ailette petit.

- **Nombre de Fourier :**

Reprenons l'expression de la constante de temps du système, τ

$$\tau = \frac{m c}{h S} = \frac{\rho \vartheta c}{h S} = \frac{\rho l S c}{h S} = \frac{\rho c \lambda l^2}{\lambda h l} = \frac{l^2}{\alpha} \frac{1}{Bi}$$

où $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ est la diffusivité thermique de la bille (en m²/s)

$$\Rightarrow \frac{t}{\tau} = Bi \frac{t}{l^2 / \alpha}$$

$\frac{l^2}{\alpha}$ correspond à un temps de diffusion thermique, caractérisant la pénétration de la chaleur à l'intérieur du solide.

On introduit un temps sans dimension, appelé *nombre de Fourier* :

$$Fo = \frac{t}{l^2 / \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\tau} = Bi Fo$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-Bi Fo)$$