Application du Principe Fondamental de la Dynamique au projectile

Prise en compte des forces de frottements s'exerçant sur le projectile

Bilan des forces s'appliquant sur le projectile au temps initiale t_0 (frottement statique) :

- Poids du projectile : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_x}$ — m la masse, g l'accélération de la pesanteur

- Force magnétique pour une spire : $\boxed{\vec{F_m} = \oplus\,\frac{6\chi V\mu_0 I^2 R^4 z}{8(R^2+z^2)^4}\,\vec{u_z}}$

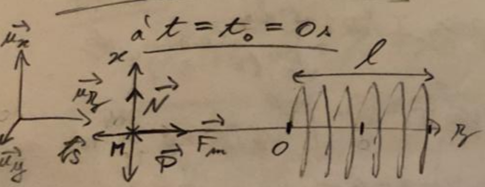
  car toutes les spires sont devant

- Force de frottement statique $\vec{f}$: $\|\vec{f_s}\| \leq \mu_{statique}\|\vec{N}\|$ Loi de Coulomb

  ↳ coefficient de frottement statique

$\boxed{\vec{f} = \vec{f_s} + \vec{N}}$ $\quad$ $\boxed{\vec{f_s} = -\|\vec{f_s}\|\,\vec{u_z}}$ $\quad$ $\boxed{\vec{N} = \|\vec{N}\|\,\vec{u_x}}$

Schéma de la situation



PFD à l'équilibre dynamique :

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f_s} + \vec{F_{m\,tot}} = \vec{0}$$

On prend l'instant juste avant la mise en mouvement, c'est-à-dire l'instant où $\vec{f_s}$ atteint sa valeur maximale : $\|\vec{f_s}\| = \mu_{statique}\|\vec{N}\|$

PFD sur l'axe (Ox) :

$-mg + N = 0$

$\Rightarrow \boxed{N = mg}$

N le nombre de bobine

PFD sur l'axe (Oz) :

$$\|\vec{F_{m\,tot}}\| - \|\vec{f_s}\| = 0 \Rightarrow \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{6\chi V\mu_0 I^2 R^4 z_i}{8(R^2+z_i^2)^4}\right]}_{\|\vec{F_{m\,tot}}\|} - \mu_{statique}N = 0$$

$\|\vec{F}_{m\,tot}\| = \mu_{stat}\, m\, g$

Pour avoir un mouvement, il faut que :

$$\|\vec{F}_{m\,tot}\| \geq \mu_{stat}\, m\, g$$

On a trouvé expérimentalement $\mu_{statique} = 0{,}16$

$m \simeq 100\,g$

et $g \simeq 9{,}81\ m.s^{-1}$

Donc $\|\vec{F}_{m\,tot}\|_{min} = 0{,}157\,N$

On en déduit l'intensité minimum de courant à fournir I_{min} :

Pour cela, il faut préciser l'expression de $\vec{F}_{m\,tot}$:

On fait l'hypothèse que la distance entre les spires est assez petite pour considérer un cas continu : $z(i) \to z$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{6\chi V\mu_0 I^2 R^4 z(i)}{8(R^2+z(i)^2)^4} = \int_0^l \frac{6\chi V\mu_0 I^2 R^4 z}{8(R^2+z^2)^4}\,dz$$

(On place n le projectile à l'entrée O de la bobine)

$$= \frac{3}{4}\chi V\mu_0 I^2 R^4 \int_0^l \frac{z}{(R^2+z^2)^4}\,dz$$

$$\|\vec{F}_{m\,tot}\| = \frac{3}{4}\chi V\mu_0 I^2 R^4 \int_0^l z(R^2+z^2)^{-4}\,dz$$

$$= \frac{3}{4}\chi\mu_0 V I^2 R^4 \left[\frac{(R^2+z^2)^{-3}}{-6}\right]_0^l$$

$$= \frac{3}{4}\chi\mu_0 V I^2 R^4 \left(-\frac{(R^2+l^2)^{-3}}{6} + \frac{R^{-6}}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\chi\mu_0 V I^2 R^4 \left(\frac{(R^2+l^2)^3 - R^6}{6R^6(R^2+l^2)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\chi\mu_0 V I^2}{R^2}\frac{(R^2+l^2)^3 - R^6}{(R^2+l^2)^3}$$

$$\boxed{\|\vec{F}_{m\,tot}\| = \frac{1}{8}\frac{\chi\mu_0 V I^2}{R^2}\left(1 - \frac{R^6}{(R^2+l^2)^3}\right)}$$

Force minimum pour faire démarrer le projectile

$$\|\vec{F}_{m\,tot}\| = \frac{7}{8}\,\frac{x\mu_0 V I^2}{R^2}\left(1-\frac{R^6}{(R^2+l^2)^3}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8R^2\,\|\vec{F}_{m\,tot}\|_{min}}{x\mu_0 V}\left(1-\frac{R^6}{(R^2+l^2)^3}\right)^{-1/2}} = I_{min}$$

$$\Rightarrow I_{min} =$$

Résumé ⇒ Étude de la vitesse → dynamique

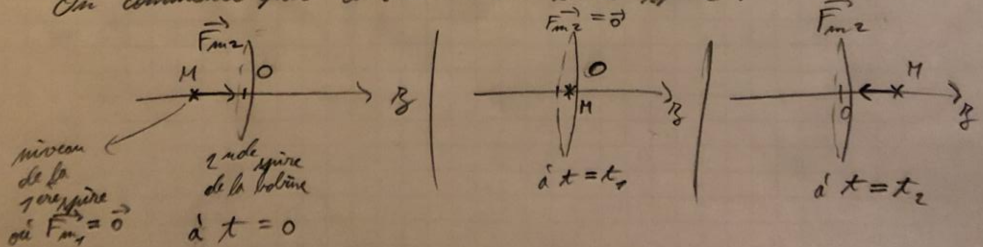
Bilan des Forces

- $\vec{P} = -mg\,\vec{u_x}$
- $\vec{F}_{m\,tot} = \frac{7}{8}\,\frac{x\mu_0 V I^2}{R^2}\left(1-\frac{R^6}{(R^2+l^2)^3}\right)\vec{u_z}$
- $\vec{f_D} = \|\vec{N}\|\mu_D\,\vec{u_z}$ (force de frottement dynamique)
- $\vec{N} = \|\vec{N}\|\,\vec{u_x}$
- $\vec{F}_{air}$ frottement de l'air que l'on néglige pour l'instant

PFD

$$\vec{P} + \vec{F}_{m\,tot} + \vec{f_D} + \vec{N} = m\vec{a}$$

On commence par considérer une seule spire :



Début étude dynamique