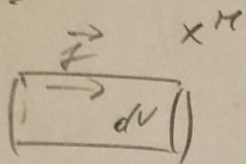


Bobine de TP $I_A \rightarrow 1 \text{ mT}$

Biot et Savart

$\vec{B}(M)$ champ magnétique au point M



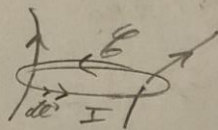
$$\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} dV \vec{J}(A) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

μ_0 perméabilité du vide $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ SI}$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \approx 10^{-7} \text{ SI.}$$

Théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enclosée}}$$



Force de Laplace

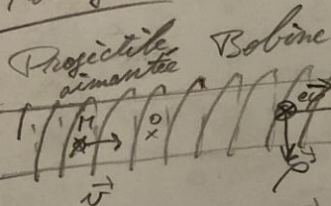
$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

I intensité du courant

\vec{B} champ magnétique

\vec{F}_L Force de Laplace

Notre Montage



M position du projectile

$\vec{B}(M)$? Puis $v(M)$? $ME(Oz)$

On suppose le projectile petit devant les dimensions de la bobine (hypothèse du solénoïde infini):

(Invariances :

- Invariance par translation selon \vec{e}_z

- Invariance par rotation selon \vec{e}_φ

Donc $\vec{B}(\rho)$ \Rightarrow Pour $\rho \neq 0$

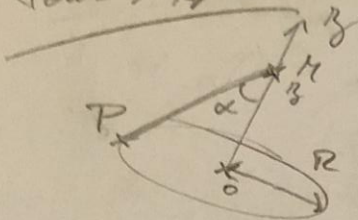
Symétries:

- Tout axe passant par (O, z) est plan d'antisymétrie des courants

- $P(O, i; \vec{e}_\rho; \vec{e}_z)$ plans de symétrie du courant $\Rightarrow \vec{B}(M) \in (Oz)$ d'antisymétrie car opposés avec plans

Donc on a $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_y$

Pour 1 Ampère



Biot et Savart

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \text{ or } \vec{j} dV = I d\vec{l}$$

$$\vec{PM} = -R \vec{u}_\rho + B \vec{u}_z$$

$$d\vec{l} = R d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R d\varphi (R \vec{u}_z + B \vec{u}_\rho)}{4\pi (R^2 + B^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + B^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi (R \vec{u}_z + B \vec{u}_\rho)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + B^2)^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} R \vec{u}_z d\varphi + \int_0^{2\pi} B (\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y) d\varphi \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + B^2)^{3/2}} \times \left[2\pi R \vec{u}_z + \int_0^{2\pi} B \cos\varphi \vec{u}_x d\varphi + \int_0^{2\pi} B \sin\varphi \vec{u}_y d\varphi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + B^2)^{3/2}} \vec{u}_z}$$

$$\text{Or, } \sin(\alpha) = \frac{R}{PM} \quad PM^3 = \frac{R^3}{\sin^3 \alpha}$$

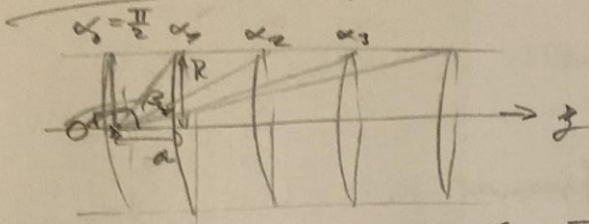
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \frac{R^3}{\sin^3 \alpha}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z}$$

Dans notre cas, $I_{\text{max}} = 3A$
 $\|\vec{B}(O)\| = \frac{1,26 \times 10^{-6} \times 3}{2 \times 5 \times 10^{-2}}$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \vec{B}(O) \sin^3 \alpha} = 3,78 \times 10^{-5} = 37,8 \mu T$$

Plusieurs Spires



$$a = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\alpha_n = \pi - \beta_n$$

$$\beta_n = \tan^{-1} \left(\frac{R}{m a} \right)$$

On prend 11 spires en exemple

$$\vec{B}(M) = \sum_{n=0}^{10} \vec{B}_n(\alpha_n)$$

$$= B_0 + B_1(\alpha_1) + B_2(\alpha_2) + B_3(\alpha_3) + \dots + B_{10}(\alpha_{10})$$

$$B_0 = 37,8 \mu\text{T}$$

$$B_1 = B_0 \sin^3(\alpha_1) = B_0 \sin^3(\pi - \tan^{-1}(\frac{R}{a})) = 3,56 \times 10^{-5} \text{ T} = 35,6 \mu\text{T}$$

$$B_2 = B_0 \sin^3(\alpha_2) = 30,3 \mu\text{T}$$

$$B_3 = 23,8 \mu\text{T}$$

$$B_4 = 18 \mu\text{T}$$

$$B_5 = 13,4 \mu\text{T}$$

$$B_6 = 9,9 \mu\text{T}$$

$$B_7 = 7,4 \mu\text{T}$$

$$B_8 = 5,6 \mu\text{T}$$

$$B_9 = 4,3 \mu\text{T}$$

$$B_{10} = 3,4 \mu\text{T}$$

$$\vec{B}(M) = 189,5 \mu\text{T} = 0,1895 \text{ mT}$$

Pour 21 spires

$$\vec{B}(M) = 202,5 \mu\text{T} = 0,20 \text{ mT}$$

Au-delà de la 20^e spire, on peut considérer B_n négligeable

$$B_{11} = 2,7 \mu\text{T}$$

$$B_{19} = 0,62 \mu\text{T}$$

$$\text{Donc } \vec{B}(0) \approx 0,20 \text{ mT}$$

$$B_{12} = 2,2 \mu\text{T}$$

$$B_{20} = 0,53 \mu\text{T}$$

$$B_{13} = 1,8 \mu\text{T}$$

Ces où M est au milieu du solénoïde (n'est plus infini dans ce cas):

$$B_0 + \sum_{n=1}^{-10} B_n + \sum_{n=1}^{10} B_n = \vec{B}(M)$$

$$\vec{B}(M) = B_0 + \sum_{n=1}^{10} B_0 \sin^3(\tan^{-1}(\frac{R}{m a})) + \sum_{n=1}^{10} B_0 \sin^3(\pi - \tan^{-1}(\frac{R}{m a}))$$

$$B_{14} = 1,4 \mu\text{T}$$

$$B_{15} = 1,2 \mu\text{T}$$

$$B_{16} = 1 \mu\text{T}$$

$$B_{17} = 0,85 \mu\text{T}$$

$$B_{18} = 0,72 \mu\text{T}$$

$$\vec{B}(M) = B_0 + 2 \sum_{n=1}^{10} B_0 \sin^3(\tan^{-1}(\frac{R}{m a})) = 347,2 \mu\text{T} = 0,34 \text{ mT}$$

$$\|\vec{B}(r)\| \neq \|\vec{B}(0)\|$$

$$\|\vec{B}(r)\| \text{ au milieu vaut } 0,34 \text{ mT}$$

Au bout du solénoïde, $\vec{B}(r)$ vaut approximativement $0,20 \text{ mT}$

Calcul de $\|\vec{v}(r)\|$

Calcul de la Force magnétique exercée sur le projectile

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) \vec{B} \quad \text{avec } \mu \text{ le moment magnétique du projectile}$$

$$\mu = \|\vec{\mu}\| = \chi H V \quad \text{avec } \begin{cases} \chi \text{ la susceptibilité magnétique du projectile} \\ H = \|\vec{H}\| \text{ la norme du vecteur excitation} \\ \text{magnétique} \\ V \text{ le volume du projectile} \end{cases}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad \text{et } \vec{J} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \rightarrow \text{résultante des moments dipolaires magnétiques}$$

et μ_0 la perméabilité du vide (\vec{J} vecteur aimantation)

On suppose l'aimantation du projectile homogène : $\frac{d\vec{\mu}}{dV} = \vec{0} = \vec{J}$

$$\text{et on a } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\text{Ainsi } \mu = \frac{\chi B V}{\mu_0}$$

Ici, on travaille à une dimension (\vec{B} est selon \vec{e}_z):

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} F_x = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) B_x = 0 \\ F_y = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) B_y = 0 \\ F_z = (\vec{\mu} \cdot \text{grad}) B_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| F_z = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B}{\partial z} \right|$$

$$\text{Donc : } F_z = \frac{\chi B V}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{\chi V}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{\partial (B^2)}{\partial z}$$

$$\left| F_z = \frac{\chi V}{2\mu_0} \frac{\partial (B^2)}{\partial z} \right|$$

En première estimation, on peut prendre un $\frac{\partial (B^2)}{\partial z}$ constant pour utiliser les valeurs numériques du champ calculées plus tôt.

- Le premier projectile utilisé était une bille donc $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- De plus, on calcule le gradient de \vec{B} entre $r=0$ et r_{milieu} de bobine
- $x_{\text{fer}} \approx 200$ SI ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI ; $r = 4\text{mm}$ début bobine = 2,5cm

$$F_z = \frac{xV}{2\mu_0} \frac{B^2(r=2,5\text{cm}) - B^2(r=0)}{r_{\text{milieu}} - r}$$

On avait trouvé $B(\text{milieu}) = 0,34\text{mT}$

$B(\text{début}) = 0,20\text{mT}$

$$F_z = \frac{200 \times \frac{4}{3}\pi (4 \times 10^{-3})^3}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times \frac{(0,34 \times 10^{-3})^2 - (0,20 \times 10^{-3})^2}{2,5 \times 10^{-2} - 0}$$

$$\Rightarrow F_z \approx 21,3 \times 3,02 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow |F_z \approx 64,3 \mu\text{N}| \text{ Pour une bille aimantée avec un gradient constant}$$

• Pour un cylindre

$$V = \pi r^2 h \quad \text{On prend } h = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$r = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$F_z \approx 50 \times 3,02 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow |F_z \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{ N} \approx 150 \mu\text{N}| \quad \text{On a donc une meilleure chance de déplacer le cylindre plutôt que la bille}$$

On affine maintenant l'expression de F_z en remplaçant B^2 par son expression trouvée plus tôt: $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}} \vec{\mu}_z$ pour une spire

Pour simplifier les calculs, on ne considère que le champ de la spire: la valeur de F_z obtenue sera inférieure à la valeur réelle mais donnera un ordre de grandeur de celle-ci.

$$F_z = \frac{xV}{2\mu_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_0^2 I^2 R^4}{4(R^2 + r^2)^3} \right) = \frac{xV\mu_0 I^2 R^4}{8} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{(R^2 + r^2)^3} \right)$$

$$= \frac{xV\mu_0 I^2 R^4}{8} \times (-3) \times (2r) \frac{1}{(R^2 + r^2)^4}$$

$$= \frac{-6 xV\mu_0 I^2 R^4 r}{8(R^2 + r^2)^4}$$

$r=0$
qd on milieu de la bobine

La force exercée par une spire sur un objet aimanté est donc nulle lorsque l'objet se trouve ds la spire.

Dans notre modèle, lorsque le projectile est dans la spire du milieu, il s'arrête ^{après quelques oscillations}. Ceci est cohérent avec la théorie puisque dans la formule de F_z , on voit que F_z change de signe lorsque l'objet passe la spire :

$$F_z = \frac{6 \times \mu_0 V I^2 R^4 z}{2 (R^2 + z^2)^4} \mu_B$$

$$F_z = -\frac{6 \times \mu_0 V I^2 R^4 z}{2 (R^2 + z^2)^4} \mu_B$$

Lorsque l'on ajoute les autres spires et que l'on considère toujours que l'objet est dans la spire du milieu, la spire du milieu n'exerce pas de force sur l'objet et les forces exercées par les autres spires se compensent deux à deux par symétrie : l'objet est à l'équilibre au centre de la bobine, c'est ce que l'on observe.

On calcule maintenant la force exercée par la spire du milieu sur notre objet cylindrique lorsque il se trouve à l'entrée de la bobine : $z = -2,5 \text{ cm}$ $I = 3 \text{ A}$ $R = 10^{-2} \text{ m}$

$$F_z = \frac{6 \times 200 \times \pi \times (2 \times 10^{-3})^2 \times 5 \times 10^{-2} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3^2 \times (10^{-2})^4 \times 2,5 \times 10^{-2}}{2 \times ((10^{-2})^2 + (2,5 \times 10^{-2})^2)^4}$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{2,13 \times 10^{-12}}{2,27 \times 10^{-12}} = 9,64 \times 10^{-7} \text{ N} \approx 1 \mu\text{N}$$

Pour une spire se trouvant à 7 cm : $z = -7 \text{ cm}$

$$F_z \approx \frac{8,5 \times 10^{-13}}{7,28 \times 10^{-14}} \approx 6,64 \times 10^{-5} \text{ N} \approx 66,4 \mu\text{N}$$

Avec l'ensemble des spires, on devrait donc avoir F_z entre 100 et 200 μN .

Prise en compte des forces de frottements s'exerçant sur le projectile

Bilan des forces s'appliquant sur le projectile au temps initiale t_0 (frottement statique):

- Poids du projectile : $\vec{P} = -mg \vec{u}_x$ m la masse
g l'accélération de la pesanteur

- Force magnétique : pour une spire $\vec{F}_m = \frac{6\pi v \mu_0 I^2 R^4 \beta}{8(R^2 + \beta^2)^4} \vec{u}_\beta$

car toutes les spires sont devant

- Force de frottement statique f : $\|\vec{f}_s\| \leq \mu_{statique} \|\vec{N}\|$ Loi de Coulomb

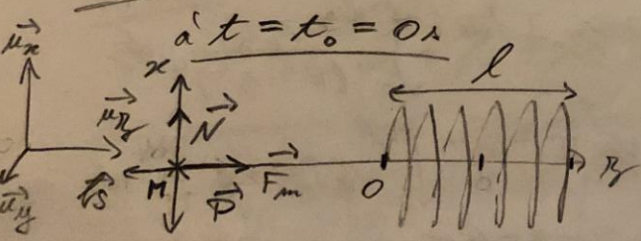
$\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{N}$

$\vec{f}_s = -\|\vec{f}_s\| \vec{u}_\beta$

↳ coefficient de frottement statique

$\vec{N} = \|\vec{N}\| \vec{u}_x$

Schéma de la situation



PFD à l'équilibre dynamique:

$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_s + \vec{F}_{m,tot} = \vec{0}$

juste avant la mise en

On prend l'instant \downarrow mouvement, c'est-à-dire l'instant où f_s atteint sa valeur maximale : $\|\vec{f}_s\| = \mu_{statique} \|\vec{N}\|$

N le nombre de bobine

PFD sur l'axe (Ox):

$-mg + N = 0$
 $\Rightarrow N = mg$

PFD sur l'axe (Ox):

$\|\vec{F}_{m,tot}\| - \|\vec{f}_s\| = 0 \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^N \frac{6\pi v \mu_0 I^2 R^4 \beta_i}{8(R^2 + \beta_i^2)^4} \right] - \mu_{statique} N = 0$
 $\|\vec{F}_{m,tot}\|$

$$\|\vec{F}_{m \text{ tot}}\| = \mu_{\text{stat}} m g$$

Pour avoir un mouvement, il faut que:

$$\|\vec{F}_{m \text{ tot}}\| > \mu_{\text{stat}} m g$$

On a trouvé expérimentalement $\mu_{\text{statique}} = 0,16$

$$m \approx 100 \text{ g}$$

$$\text{et } g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{Donc } \|\vec{F}_{m \text{ tot}}\|_{\text{min}} = 0,157 \text{ N}$$

On en déduit l'intensité minimum de courant à fournir I_{min} :

Pour cela, il faut préciser l'expression de $\vec{F}_{m \text{ tot}}$:

On fait l'hypothèse que la distance entre les spires est assez petite pour considérer un cas continu: $B_z(z) \rightarrow B_z$

$$\sum_{i=1}^N \frac{6 \times V \mu_0 I^2 R^4 B_z(z)}{8(R^2 + B_z(z)^2)^4} = \int_0^l \frac{6 \times V \mu_0 I^2 R^4 B_z}{8(R^2 + B_z^2)^4} dz$$

(On place \vec{r} le projectile
à l'entrée 0 de la
bobine)

$$= \frac{3}{4} \times V \mu_0 I^2 R^4 \int_0^l \frac{B_z}{(R^2 + B_z^2)^4} dz$$

$$\|\vec{F}_{m \text{ tot}}\| = \frac{3}{4} \times V \mu_0 I^2 R^4 \int_0^l \frac{B_z}{(R^2 + B_z^2)^4} dz$$

$$= \frac{3}{4} \times \mu_0 V I^2 R^4 \left[\frac{(R^2 + B_z^2)^{-3}}{-6} \right]_0^l$$

$$= \frac{3}{4} \times \mu_0 V I^2 R^4 \left(-\frac{(R^2 + l^2)^{-3}}{6} + \frac{R^{-6}}{6} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \times \mu_0 V I^2 R^4 \left(\frac{(R^2 + l^2)^3 - R^6}{6 R^6 (R^2 + l^2)^3} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{\mu_0 V I^2}{R^2} \frac{(R^2 + l^2)^3 - R^6}{(R^2 + l^2)^3}$$

$$\|\vec{F}_{m \text{ tot}}\| = \frac{1}{8} \times \frac{\mu_0 V I^2}{R^2} \left(1 - \frac{R^6}{(R^2 + l^2)^3} \right)$$

$$\|\vec{F}_{m \text{ tot}}\| = \frac{7}{8} \frac{\chi \mu_0 V I^2}{R^2} \left(1 - \frac{R^6}{(R^2 + l^2)^3} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8 R^2 \|\vec{F}_{m \text{ tot}}\|_{\min}}{\chi \mu_0 V}} \left(1 - \frac{R^6}{(R^2 + l^2)^3} \right)^{-1/2} = I_{\min}$$

$$\Rightarrow I_{\min} = \dots$$

Résumé \Rightarrow Étude de la vitesse \rightarrow dynamique

Bilan des Forces

- $\vec{P} = -mg \vec{u}_x$
- $\vec{F}_{m \text{ tot}} = \frac{7}{8} \frac{\chi \mu_0 V I^2}{R^2} \left(1 - \frac{R^6}{(R^2 + l^2)^3} \right) \vec{u}_y$
- $\vec{f}_D = \|\vec{N}\| \mu_D \vec{u}_y$ (force de frottement dynamique)
- $\vec{N} = \|\vec{N}\| \vec{u}_x$
- \vec{F}_{air} frottement de l'air que l'on néglige pour l'instant

PFD

$$\vec{P} + \vec{F}_{m \text{ tot}} + \vec{f}_D + \vec{N} = m \vec{a}$$

On commence par considérer une seule spire :

