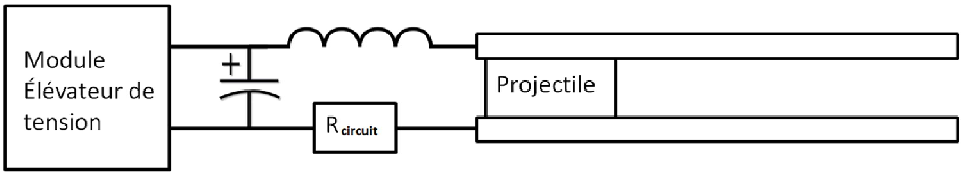
Travail sur les circuits RLC



Pour une bobine d'inductance L, l'ensemble des imperfections est représentée par une résistance r et un facteur de qualité $Q_L(\omega) = \frac{\omega_0 L}{r}$

Pour un circuit RLC série où la capacité est initialement chargée sous la tension E à t=0, on cherche une expression V(t) de la tension avec :

$V_L = L\frac{di}{dt}, i = -C\frac{dV}{dt},$

en posant :

${\omega_0}^2 = L\frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{2m} = \frac{L\omega_0}{R}$

Avec,

m : le coefficient d'amortissement

On a l'équation différentielle :

$\frac{d^2V(t)}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dV(t)}{dt} + {\omega_0}^2V(t) = 0$ (oscillateur libre amorti)

La forme des solutions est $V(t) = Ee^{pt}$

⇨ $Ee^{pt}(p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2) = 0$

⬄ $p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2 = 0$ polynome du 2nd degré sur p

On a : $\Delta = 4(m^2{\omega_0}^2p^2 - p^2{\omega_0}^2) = 4p^2{\omega_0}^2(m^2 - 1)$

Le signe de Δ dépend de m.

Donc,

$$V(t) = \frac{E}{2}\left[\left(3 - \frac{m\omega_0}{2}\right)e^{-\alpha t} + \frac{E}{2}\left(\frac{m\omega_0}{2} - 1\right)e^{\alpha t}\right]e^{-m\omega_0 t}$$

Régime sous-critique : $0 < m < 1$

On observe des oscillations amorties, ce qui ne nous intéresse pas.

Régime critique : m=1

On trouve alors $p = -\omega_0$ et une solution de la forme :

$$V(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t}$$

Avec les conditions initiales :

$$V(t=0) = E$$

⇨ $C_1 = E$

$$\frac{dV(t=0)}{dt} = 0$$

⇨ $C_2 = \omega_0 C_1 = \omega_0 E$

⇨ $V(t) = E(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$

Régime sur-critique : $m > 1$

On a les solutions $P_{1/2} = \omega_0\left(-m \pm \sqrt{(m\hat{}2 - 1)}\right)$ et une solution de la forme :

$$V(t) = C_1e^{p_1} + C_2e^{-p_2 t} = 0$$

On pose : $\alpha = \sqrt{m^2 - 1}$, on a :

$$V(t) = [C_1e^{-\alpha t} + C_2e^{\alpha t}]e^{-m\omega_0 t}$$

Avec les conditions initiales :

$$V(t=0) = E$$

$$\frac{dV(t=0)}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = E \\ \alpha(C_2 - C_1) + (C_1 + C_2)(-m\omega_0) = 0 \end{cases}$$

⇨ $\begin{cases} C_1 = \frac{E}{2}\left(3 - \frac{m\omega_0}{2}\right) \\ C_2 = \frac{E}{2}\left(\frac{m\omega_0}{2} - 1\right) \end{cases}$