

1 Introduction

Ce samedi 11 mars, soit six ans après le tsunami survenu sur les côtes nord-est du Japon, le pays se recueille en mémoire des 18446 personnes disparues. Cette catastrophe fut très meurtrière mais elle n'est malheureusement pas isolée. L'archipel japonais a en réalité très souvent été confronté aux tsunamis. Son origine étymologique vient ainsi du japonais, *tsu-nami* signifiant littéralement "vague portuaire". Dans le cadre de notre projet en autonomie, nous avons donc exploré sa formation, son mécanisme physique, ses répercussions et sa détection.

2 À la découverte de l'origine des tsunamis

2.1 Le déclenchement d'un des phénomènes naturels les plus destructeurs

La structure interne de la Terre correspond à une succession de couches aux propriétés physiques et chimiques bien particulières. Le manteau supérieur est ainsi divisible en deux couches, l'une plastique, l'asthénosphère et l'autre solide, la lithosphère. Avec une vitesse de l'ordre de quelques centimètres par an la lithosphère océanique formée à la dorsale s'éloigne lentement et se refroidit par conduction. Suite au refroidissement et aux dépôts sédimentaires, le manteau lithosphérique se densifie.

Lorsque deux plaques tectoniques convergentes se rencontrent la compression est si intense que cela entraîne le glissement de la plaque la plus dense sous l'autre. Ces dernières peuvent être océaniques (la plaque la plus vieille s'enfonce sous l'autre) ou bien océaniques et continentales (la plaque océanique, plus dense et plus fine plonge sous la plaque continentale).

En effet, au niveau de ces zones de subduction, l'énergie élastique s'accumule jusqu'à ce qu'elle soit suffisamment élevée pour contrer l'énergie de pesanteur. L'équilibre très instable est rompu et l'énergie stockée se relâche d'un coup, c'est la rupture sismique. Un séisme tsunamigénique apparaît donc uniquement lorsque le foyer et la surface de rupture de la faille se trouvent sous l'océan ou proche de la côte. Ensuite, le plancher océanique se soulève brusquement entraînant la libération d'une grande quantité d'énergie cinétique et potentielle. Puis, une haute colonne d'eau se forme au-dessus du niveau de la mer. La surpression hydrostatique la sépare en deux ondes de gravité interne, se propageant vers les côtes. Un tsunami est déclenché.

À la différence des ondes océaniques externes (ex : La houle) qui perturbent la région proche de la surface de l'eau, les ondes gravitationnelles internes sont capable de transporter de l'énergie et de la quantité de mouvement jusqu'au fond de la mer.

2.2 Les caractéristiques des tsunamis

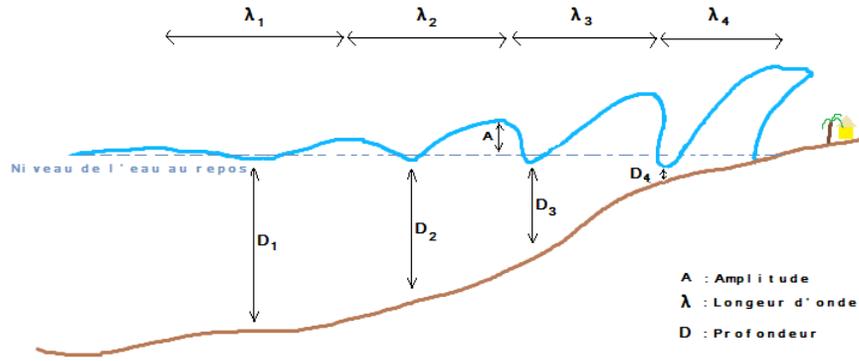
L'amplitude de ces séries ondes transverses varie au cours de leurs propagation et peuvent atteindre une trentaine de mètres de hauteur (Tremblement de terre de Sanriku en 1896 : 38,2 m) à l'approche des lignes de côtes. Pourtant, en plein océan en raison de leur longueur d'onde relativement élevée (entre 400 et 600 km alors que pour les vagues océaniques $\lambda \simeq 100m$) elles sont à peine perceptible et ne dépassent pas le mètre. Ce qui correspond à un volume de l'ordre de $250km^3$ si l'on considère : $V = \lambda hl$ avec $\lambda = 500km$, $l = 500km$ et $h = 1m$. En réalité, la hauteur d'une vague tout comme sa vitesse est liée à la profondeur marine.

Le Japon, par sa proximité avec plusieurs points triples (région où trois plaques tectoniques se rejoignent) a toujours été très sujet aux tsunamis. Néanmoins, les archives de Samurai, évoquent un mystérieux tsunami survenu en l'an 1700. À l'époque, cet événement à longuement intrigué les chercheurs japonais car aucun signe annonciateur n'avait été perçu. par les habitants de la côte Est, les empêchant de se réfugier sur les hauteurs. Ce n'est qu'au XXI ème siècle, qu'un trio nippon-américano-canadien leva le voile sur son origine. Un gigantesque séisme de magnitude 9 sur l'échelle de Richter survenu le 26 janvier sur la côte Pacifique des États-Unis. La rupture de la faille dans la zone de subduction de Cascadia s'étendait sur environ 1100 km générant une série d'ondes traversant tout l'océan Pacifique. La quantité d'énergie déployée était telle que les vagues se propageaient à des vitesses de l'ordre de $800km.h^{-1}$ en pleine mer. Ainsi, les tsunamis peuvent être jusqu'à dix fois plus rapide que les ondes de surface ($90km.h^{-1}$) et présenter des fréquences très élevées (période pouvant égaler les 60min). À titre d'exemple, pour une profondeur notée D de 6km, une longueur d'onde λ de 500km et g la constante de gravité, on obtient : $T = \lambda.v^{-1} = \lambda.(gD)^{-1} = 500.103.(9,81.6.103)^{-1} \simeq 34min$.

Lors de son déplacement, notre perturbation est soumise à des forces non conservatives telles que les forces de cisaillement ou encore les frottements avec l'air qui restent tout de même relativement négligeables. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique, les forces non conservatives causent la variation de l'énergie mécanique. Cependant, bien que la contrainte de cisaillement pour notre fluide newtonien $\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$ (avec $\eta = 1$ la viscosité dynamique de l'eau, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ la vitesse de cisaillement) ne soit pas nulle elle reste faible. Ainsi, en raison d'une faible dissipation d'énergie, de très grandes distances peuvent être parcourues par ces ondes, tel que ce fut le cas pour ce tsunami orphelin.

À l'approche du rivage ces ondes rapides de faible amplitude décélèrent et s'élèvent à des dizaines de mètres. En fait, la diminution de la profondeur marine entraîne une élévation de la perturbation. C'est l'effet de fond. L'énergie cinétique se convertit progressivement en énergie potentielle. Par ailleurs, l'échelle de variation de la profondeur est très faible par rapport à la longueur d'onde. C'est pourquoi, bien que la vague passe de 800 à $200km.h^{-1}$

à l'avant, à l'arrière la vague continue d'avancer toujours aussi vite ce qui cause un effet d'accumulation, d'où la force colossale des tsunamis.



$$\frac{\partial^2 h'(x, t)}{\partial t^2} - g(h_0 - ax) \frac{\partial^2 h'(x, t)}{\partial x^2} + ag \frac{\partial h'(x, t)}{\partial x} = 0$$

L'équation de Navier-Stokes relie ainsi l'amplitude de la vague h à la pente du fond marin.

- x : Axe des abscisses
- t : Temps
- g : Constante gravitationnelle ($9,81m.s^{-2}$)
- h : Hauteur d'eau
- h_0 : Hauteur d'eau
- a : Pente du fond marin

Ensuite, il est important de prendre en considération la topographie sous-marine. En effet, un fond marin pentu engendre une simple inondation. Alors qu'une pente faible, laisse suffisamment de temps pour les vagues de se cambrer et donc de prendre de la hauteur.

Lors d'un séisme, les scientifiques mesurent la quantité d'énergie libérée au foyer grâce à des sismographes qui enregistrent les vibrations du sol. Par conséquent, on peut connaître la localisation de l'épicentre du séisme, la profondeur du foyer et la magnitude sur l'échelle de Richter. Cette échelle suit une fonction logarithmique. De ce fait, un séisme de magnitude 6 est 30 fois plus puissant qu'un séisme de magnitude 5.

Par ailleurs, l'échelle de Richter était à son origine graduée de 1 à 9. Alors qu'à présent, celle ci ne présente pas de limite de magnitudes. On l'appelle l'échelle ouverte de Richter.

La puissance d'un tsunami est reliée à celle de la rupture sismique. C'est pourquoi, on peut comparer la magnitude d'un tsunami à celle d'un séisme.

Cependant, la formule donnant accès à l'amplitude d'un séisme ne prend pas en compte l'extension spatiale des tsunamis. Il est donc plus commode de faire appel aux échelles d'intensité et d'amplitude des tsunamis.

Il existe plusieurs échelles d'intensité comparable notamment celle de Soloviev, d'Ambraseys et de Sieberg (pas de standardisation au niveau international). Ces échelles discrètes caractérisent la force des vagues et les dégâts occasionnés.

Ensuite, parmi les échelles de magnitudes, celle d'Imamura et Iida est la plus couramment utilisée.

On retrouve l'amplitude par le biais de cette expression : $m = \frac{\log H_{max}}{\log(2)}$ avec H_{max} la hauteur maximale du tsunami près de la côte.

2.3 Les séisme ne sont pas les seuls coupables

Chaque année, près d'un million de séismes sont répertoriés dans le monde. Pourtant, seul un dixième d'entre eux ont une magnitude suffisante pour être ressentit (100 000 de magnitude supérieur à 3). Fort heureusement, tous les tremblements de terre ne causent pas de tsunamis. Ils sont en réalité très rares. Ainsi, bien que les ruptures sismiques restent les principales causes directes, il n'en est pas moins, que d'autre chocs telluriques peuvent être tout aussi dévastateurs, voir plus.

Le plus important Méga Tsunamis jamais enregistré au monde fut causé par un effondrement de terrain dans la baie de Lituya en Alaska en 1958. Son origine, un tremblement de terre de magnitude 8,3 sur l'échelle de Richter qui précipita près de trois millions de mètres carrée de roche. Ce run-up fut d'une hauteur monstrueuse de 523 mètres. Dans ce cas ci, un séisme est intervenu de manière indirect. Néanmoins, les éruptions volcaniques sous marines ou encore les chutes de météorites qui ne présentent aucun lien avec une secousse sismique peuvent également entraîner un tsunami.

Pour finir, au regard de l'opération Crossroads au cours de laquelle une série d'essais nucléaires ont été effectués dans l'atoll de Bikininous sommes en mesure d'ajouter à notre liste le facteur anthropique.

Sur ce lien vous pourrez voir en image l'opération Crossroads mené par les Etats-Unis en 1946 : <https://www.youtube.com/watch?v=FAMQizO0tGM>

Le BRGM tient à jour une base de données des tsunamis illustrés d'une cartographie interactive.

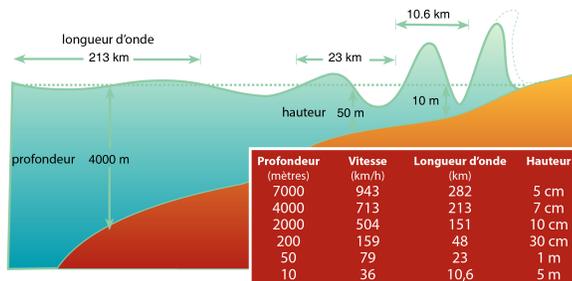
<http://tsunamis.brgm.fr/>

3 Etude théorique

3.1 Lois de vitesse

Un Tsunamis correspondent à une série d'ondes dont les caractéristiques sont les suivantes :

- grande période (temps s'écoulant entre deux crêtes successives), entre quelques minutes et quelques heures
- grande énergie mécanique
- une longueur d'onde comprise entre 10 et 500 km
- une vitesse et une amplitude qui diffèrent en fonction de la profondeur de l'eau



Au large, la hauteur de la vague H est faible devant la profondeur de l'eau h . La vitesse de propagation de la vague suit la loi suivante :

$$h > H$$
$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + th\frac{2h\pi}{\lambda}}$$

A l'approche des côtes, la longueur d'onde de la vague devient très grande par rapport à la profondeur de l'eau. La vitesse de la vague diminue et son amplitude augmente : la hauteur de la vague augmente.

Comme $\lambda = c * T$, si l'on considère que la période reste la même, alors la longueur d'onde diminue puisque la vitesse diminue. Cette vitesse suit la loi suivante :

$h \sim H$ $v = \sqrt{gh}$

Comment trouve-t-on ces résultats ?

L'opérateur dérivée totale est défini par :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}})\rho \tag{1}$$

Et l'accélération particulaire définie par :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \tag{2}$$

On applique le principe fondamentale de la dynamique au système (particule de fluide de masse dm) :

$dm \vec{a} = d\vec{F} + d\vec{F}_p$

Avec :

$$d\vec{F} : \text{force de volume}$$

$$d\vec{F}_p : \text{force de pression}$$

On obtient alors l'équation d'Euler :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{\nabla})\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P \tag{3}$$

En prenant en compte la viscosité, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\vec{\alpha} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (4)$$

Avec ces équations on peut arriver aux vitesses selon l'approximation choisie. On considère ici que le fluide est parfait $\eta = 0$

EAUX PEU PROFONDES : $h \sim H$

Composantes selon :

$$z : \rho \frac{DV_z}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial z} - g\rho - F_z\rho \quad (5)$$

$$x : \rho \frac{DV_x}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} - g\rho - F_x\rho \quad (6)$$

La variation de la vitesse selon la composante z est négligeable :

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

On a : $P - P_0 = g\rho(h - \eta)$

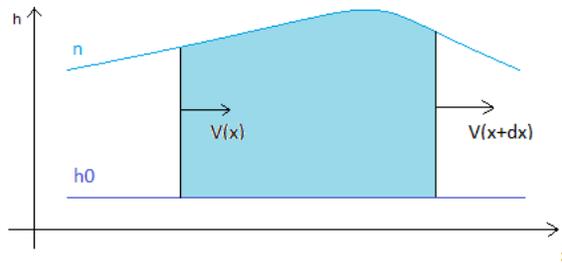
donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

En utilisant (6) on a alors :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x \quad (9)$$

Par la conservation de la masse, la variation de la masse pendant un certain temps dt doit être égale à la masse de fluide entrant moins la masse de fluide sortant.



$$m = \rho V \text{ donc } dm = \rho dV$$

$$dm = \text{entrant} - \text{sortant}$$

$$dm = h(x)v(x)dt - h(x+dx)v(x+dx)dt$$

C'est a dire :

$$dm = h(x,t)dx - h(x,t+dt)dx$$

Or par définition :

$$f(x,t+dt) - f(x,t) = f'(x)dx \quad (10)$$

C'est a dire :

$$f(x,t+dt) - f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Donc :

$$dm = h(x, t)dx - h(x, t + dt)dx = -\frac{\partial h}{\partial t}dt dx$$

$$\frac{h(x, t) - h(x, t + dt)}{dt} = \frac{\partial h v(x)}{dx}$$

Donc :

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial h v(x)}{dx} \quad (11)$$

Or $\boxed{h = h_0 + \eta}$

Donc :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - v(x)\frac{\partial \eta}{\partial x} + (h_0 + \eta)\frac{v(x)}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

Comme η est petit, on a :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = h_0 \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (13)$$

Donc avec (13) et (9) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - h \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

Si on considère uniquement la force de gravité on a :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = gh$$

Soit :

$$v = \sqrt{gh}$$

Vitesse en eaux profondes

Précédemment nous avons donc trouvé une loi de vitesse s'appliquant aux eaux peu profondes mais nous allons voir que cette loi devient, fautive en eaux profondes. En eaux profondes on peut supposer la vitesse selon l'axe verticale comme nulle, de plus le caractère irrotationnel de la vitesse $v(u, w)$ nous impose :

$$v = \nabla\Phi$$

Le caractère incompressible du fluide (hypothèse simplificatrice, un fluide étant toujours compressible en réalité) implique :

$$\nabla v = 0$$

On a donc alors :

$$\nabla^2\Phi = 0 \implies \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

On suppose alors que la solution de Φ est de la forme :
 $\Phi = A(y)\sin(kx - \omega t)$ En remplaçant Φ par sa valeur dans (1) on obtient :

$$\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} - k^2 A(y) = 0 \quad (15)$$

Une des solutions de cette équation est :

$$A(y) = Bch[k(y + h)] + Csh[k(y + h)] \quad (16)$$

$$\Phi = \{Bch[k(y + h)] + Csh[k(y + h)]\} \sin(kx - \omega t) \quad (17)$$

Les conditions cinématiques imposent $w = 0$ pour $y = 0 \implies \frac{\partial\Phi}{\partial y}$

La condition dynamique à la surface libre** nous donne :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

La contrainte au fond nous impose $C = 0$, donc :

$$\Phi = \{Bch[k(y + h)]\} \sin(kx - \omega t) \quad (19)$$

On injecte donc Φ dans cette équation :

$$\omega^2 ch(kh) \sin(kx - \omega t) = gksh(kx) \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \omega^2 ch(kh) = gksh(kx) \quad (20)$$

Donc :

$$\omega^2 = gkth(kh) \quad (21)$$

Or $c = \frac{\omega}{k}$ de plus $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$c^2 = \frac{g}{k} th(kh) \Rightarrow c = \sqrt{\frac{g}{k} th(kh)} \quad (22)$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi k} th\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (23)$$

Remarque 1 : En eaux peu profondes on a λ qui reste relativement important (passe de $\lambda = 282km$ à $7000m$, à $\lambda = 10.6km$ à $10m$ de profondeur) mais la profondeur h de l'eau diminue significativement, ainsi kh tend vers 0. On peut donc faire un développement limité de kh qui tend vers 0 et on retrouve l'expression $c = \sqrt{gh}$.

Remarque 2 : Dans le cas où la tension de surface est non négligeable l'équation (9) s'écrit :

$$c^2 = \frac{g}{k} \left(1 + \frac{\sigma k^2}{g\rho}\right) th(kh) \quad (24)$$

où σ représente le coefficient de tension de surface.

Cependant la longueur d'onde en milieu profond étant assez importante (de l'ordre de la centaine de kilomètre), on peut négliger la tension de surface.

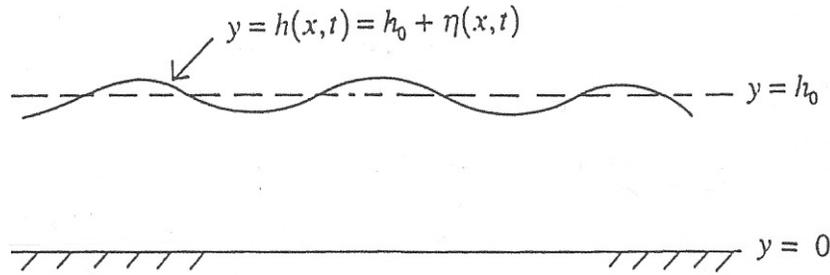
3.2 KdV

•Soliton

En 1844, lors d'une promenade le long d'un canal, John Scott Russell observe une vague qui semble se propager sans atténuation ni déformation sur plusieurs kilomètres. C'est le premier à avoir observé ce phénomène : C'est l'onde solitaire (ou soliton). Cela résulte de deux effets combinés qui se compensent : la dispersion et le raidissement du front d'onde . Cette onde diffère des vagues ordinaires (ex : houle) car elle n'est pas générée par le vent. Ce phénomène peut expliquer la propagation des vagues lors des tsunamis qui se propagent sur plusieurs kilomètres, sans atténuation notable. C'est d'ailleurs une des solutions de l'équation de Korteweg-DeVries (on verra cela un peu plus bas).

•Korteweg-DeVries

L'équation de Korteweg-DeVries est une équation qui modélise le comportement des vagues en faibles profondeur. Cette équation décrit le mouvement unidimensionnel d'une onde disperse, incluant une dispersion à la fois en amplitude et en fréquence. Elle peut aussi servir à modéliser les comportement des vagues lors d'un Tsunami, car si en eaux profondes la longueur d'onde des vagues est très importante avec des vagues de petites amplitudes, en s'approchant des côtes les phénomènes non linéaires augmentent.



On se place dans le cas d'un modèle à 2 dimensions, le fond est repéré par $y = 0$ et la surface libre est donnée par $y = h(x, t)$, h_0 qui désigne la hauteur d'eau à l'équilibre (cf. figure ci-dessus). On a alors :

$$\eta = h(x, t) - h_0 \quad (25)$$

La vitesse v dépend de 2 variables $v(u, w)$ On rappelle que l'on est en présence d'un fluide incompressible, ainsi :

$$\nabla v = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

L'équation d'Euler nous donne le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (28)$$

En négligeant la tension de surface et en établissant la pression à la surface libre comme nulle, on a les conditions de contrainte et de surface libre suivantes :

$$\Rightarrow w(x, 0, t) = 0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow p(x, h, t) = 0 \quad (30)$$

Ainsi en ne s'intéressant qu'à l'axe des y on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w(x, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (31)$$

On décide de se placer dans le cas où la hauteur h d'eau est petite devant la longueur d'onde caractéristique, ainsi l'amplitude des vagues η est petite. Ce qui justifie que la vitesse $w(x, h, t)$ soit petite, et comme $w(x, 0, t) = 0$ on s'attend à ce que les valeurs de $w(x, y, t)$ reste tout le temps petites, on peut alors faire l'approximation suivante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0 \quad (32)$$

En intégrant selon y l'équation (19) on a :

$$p = \rho gh(x, t) - \rho gy \quad (33)$$

Ainsi l'équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

On intègre alors (13) entre $y = 0$ et $y = h$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int u \partial y - u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + w(x, h, t) - w(x, 0, t) = 0 \quad (35)$$

A l'aide de (16) et (18) on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int u \partial y = 0 \quad (36)$$

Pour la suite on décide d'introduire une nouvelle notation pour les dérivée particulaire $\frac{D}{Dt}$ Ainsi l'équation (21) donne :

$$\frac{D}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (37)$$

Dans l'équation précédente on remarque que le côté droit est indépendant de y , ainsi si u est initialement indépendant de y , il le reste constamment.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

Et :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

Ces deux équations sont valables si $u(x, y, t)$ varie lentement selon y . Elles nous permettent alors de trouver :

$$c^2 = gh \quad (40)$$

Dans le cas d'onde simple, on obtient :

$$h \frac{\partial u}{\partial h} = \pm c = \pm(\sqrt{gh}) \quad (41)$$

Ce qui donne :

$$c = c_0 \pm \frac{u}{2} \quad (42)$$

Or on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm [3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}] \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (43)$$

Maintenant on a $h = h_0 + \eta$, donc :

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{h_0} \right) + \dots \right] = 0 \quad (44)$$

Ainsi si $\left(\frac{\eta}{h_0} \right)$ est petit, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (45)$$

Si on prend l'ordre suivant de $\left(\frac{\eta}{h_0} \right)$ on a :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (46)$$

Or l'équation (32) est l'équation des vagues linéaires à 1 dimension, pour des vagues monochromatiques la relation de dispersion est :

$$\omega = (\sqrt{gh_0})k \quad (47)$$

Cependant pour les vagues de gravité linéaires (linear gravity waves) la relation est (cf partie vitesse en eaux profondes) :

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (48)$$

En faisant un développement limité on obtient :

$$\omega = \sqrt{gh_0}k \left[1 - \frac{1}{6}(kh_0)^2 + \dots \right] \quad (49)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (51)$$

En posant :

$$u = -6^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right), \quad x = 6^{\frac{1}{3}} \frac{x}{h_0}, \quad t = \left(\sqrt{\frac{g}{h_0}}\right) t$$

Ainsi on peut écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (52)$$

Solution de KdV

Il est souvent compliqué de trouver des solutions à des équations différentielles non linéaires, cependant KdV en comporte plusieurs, nous allons étudier ces solutions et en déduire les caractéristiques physique réels qui en résulte.

◦ **La solution "Travelling wave".**

$$u(x, t) = u(x - Ut) \quad (53)$$

Dans cette expression U est une constante Cette solution montre que la vagues se déplace selon la direction des x croissants.

◦ **La solution "Cnoidal Waves"**

On l'appelle ainsi car elle s'exprime à partir de fonction "cnoidal" (fonction elliptique de Jacobi) Une fonction "cnoidal" a pour propriétés :

$$cn(0) = 1, cn(u + 4K) = -cnu \quad (54)$$

où "K" est le quart de periode qui vaut :

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx \quad (55)$$

La solution est de la forme :

$$u(x, t) = b - (b - c)cn^2 \left[\left(\frac{a - c}{2}\right)^{1/2} (x - Ut) \right] \quad (56)$$

En ayant les paramètres a,b,et c, l'amplitude $(b - c)$, vitesse de propagation U et la période, peuvent être déterminées. La période dépend directement de $k = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^{1/2}$, on voit donc que la période est liée à l'amplitude. Cette solution montre bien les non linéarités des vagues s'approchant des côtes, car pour les "linear wave" tous ces paramètres sont indépendants les uns des autres.

Un cas particulier, existe lorsque $a = b$, alors $k = 1$ et K tend vers l'infinie. Sachant que la période T est directement liés à K par $T = 4K$, la période devient alors infinie et on est dans le cas de la solution en onde solitaire (ou soliton).

Solution en Onde solitaire

Elle est de la forme :

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right] \quad (57)$$

Où sech est la fonction sécante hyperbolique $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$

*cf Simple wave and Shock Wave p56, "Wave and Stability in Fluids"

*cf p24-26 :

<http://web.mit.edu/2.016/www/handouts/Free-Surface-Waves.pdf>

4

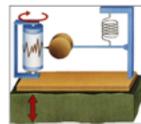
4.1 Alerte et prévention

Un système d'alerte est composé de capteurs sismiques, de marégraphes et d'un système de communication permettant au plus vite la réception des informations, leurs analyses, la prise de décisions, et l'envoi de messages d'alertes aux régions concernées. Dans un premier temps, le réseau de stations sismiques détecte le tremblement de terre. Il fonctionne en continu et en temps réel. Une fois un séisme enregistré, il transmet ses données aux centres d'alertes tsunamis de la région concernée. Il s'agit évidemment d'une phase de "pré-alerte". Tous les tremblements de terre ne génèrent pas de tsunamis. Un sismographe est un appareil capable de détecter de très petits mouvements du sol et de les enregistrer. Il est constitué le plus souvent d'une masse et d'un bâti lié au sol. Un mouvement du sol va entraîner un mouvement du bâti, puis un mouvement relatif entre la masse et le bâti qui porte également le système d'enregistrement. C'est donc ce mouvement relatif qui est enregistré. Un sismomètre peut enregistrer des mouvements verticaux et horizontaux du sol. Actuellement on utilise surtout des sismomètres électromagnétiques. Le mouvement du sol z_{sol} est lié au mouvement de la masse par l'équation suivante, caractéristique des oscillateurs :

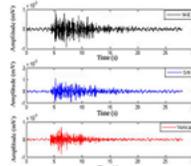
$$\ddot{z} + 2\alpha\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = M \ddot{z}_{\text{sol}}$$



Sismomètre horizontal



Sismomètre vertical



Le deuxième réseau est le réseau marégraphique qui mesure le niveau de la mer. Des stations situées en bord de côtes ou au large permettent de détecter concrètement le tsunami. Là encore, ce réseau doit fournir des données en continu et en temps réel aux centres d'alerte.

De plus, en pleine mer, des bouées « spéciales » sont placées stratégiquement. Ce sont des stations sous-marines de détection des tsunamis : le Système DART qui a été mis en place en 1995 par les États-Unis, pour protéger leurs côtes des effets dévastateurs de ceux-ci. Ce système de prévention a pour but de détecter les changements de pression de la mer dans le but de détecter un éventuel tsunami. Il utilise une bouée et un enregistreur de pression profonde associé au Satellite GOES pour transmettre les informations. Lorsqu'un événement de tsunami se produit, les premières informations disponibles sur la source du tsunami sont basées uniquement sur les informations sismiques disponibles pour l'événement sismique. À mesure que l'onde de tsunami se propage dans l'océan et qui atteint successivement les systèmes DART®, ces systèmes signalent des mesures d'information au niveau de la mer dans les centres d'alerte aux tsunamis, où l'information est traitée pour produire une estimation nouvelle et plus raffinée de la source du tsunami. Le résultat est une prévision plus précise du tsunami qui peut être utilisé pour émettre des montres, des avertissements ou des évacuations.

À côté des systèmes d'alerte, des autorités locales doivent faire aussi des efforts pour mieux informer la population (sensibilisation dans les écoles, simulation d'alertes...). En effet, chacun doit savoir que dans la plupart des cas, l'arrivée d'un tsunami se caractérise par des comportements particuliers des vagues quelques minutes avant son arrivée. Les vagues deviennent un peu plus importantes, puis soudainement la mer se retire de plusieurs mètres. Il faut tout de suite évacuer et se placer en hauteur, dans des lieux.

4.2 Risque et dégâts :

Les dégâts causés par le tsunami sont énormes : maisons détruites, dommages sur des infrastructures publiques, chemins de fer, routes, centrales électriques et installations de distribution d'eau. Le nombre de victimes peut même atteindre jusqu'aux 280.000 morts, score atteint par le tsunami Samatra en 2004. Un autre exemple dévastateur, le tsunami de 2011, au Japon, a malheureusement fait environ 18 000 victimes. Ce dernier a également entraîné l'accident nucléaire de Fukushima placé au niveau 7, le plus élevé sur l'échelle internationale des événements nucléaires (INES) des accidents nucléaires et radio logiques. Les tsunamis en France ne sont pas rares. En 1755 un tsunami meurtrier a frappé Lisbonne et a fait 30.000 victimes.