

Instabilité de Rayleigh Plateau

Partie 1: Etude de l'inégalité de Plateau

Thomas Andrade Maxime Baudot Nicolas Captier Théo Torcq

6 mai 2016

1 Tension de surface

1.1 Présentation

Au sein d'un fluide, les molécules exercent entre elles des forces d'attraction ou de répulsion : force de Van der Waals (attraction), force électrostatique (attraction ou répulsion).

On peut étudier, à titre d'exemple, ce qu'il se passe pour un gaz monoatomique comme l'argon. On peut tracer l'énergie potentielle associée à l'interaction de deux molécules (potentiel de type Lennard-Jones)

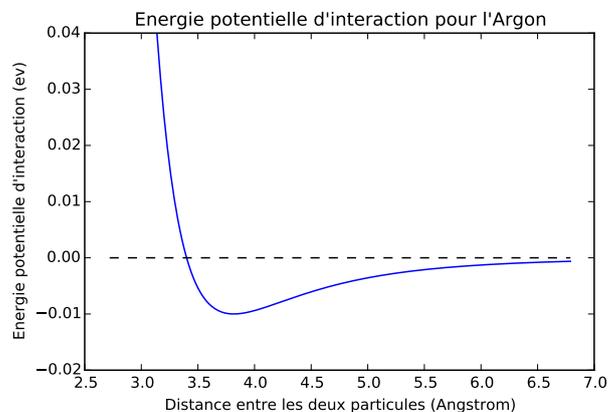


FIGURE 1 –

Il existe un minimum d'énergie potentielle pour lequel le système est stable et celui-ci est négatif. Les interactions avec les autres molécules qui l'entourent diminuent l'énergie de la molécule d'Argon.

Si pour un fluide les interactions entre molécules diminuent leur énergie on en déduit que les molécules qui sont à la surface sont plus énergétiques que les autres car elles sont entourées par moins de molécules et ont donc moins d'interactions pour diminuer leur énergie.

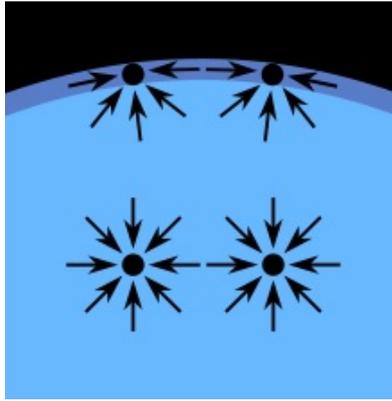


FIGURE 2 –

On associe donc à la surface du fluide une énergie par unité de surface : la tension superficielle notée σ . L'énergie de surface s'écrit alors (avec S la surface du fluide) :

$$E_{surface} = \sigma S \quad (1)$$

Remarque : On peut également définir la tension superficielle comme une force par unité de longueur. Cette définition trouve un sens pour certaines expériences.

On se muni d'un cadre rectangulaire et d'une tige de longueur L . On la place de manière à ce qu'elle divise le cadre en deux cadres rectangulaires. On immerge le dispositif dans de l'eau savonneuse. Lorsqu'on le ressort on obtient deux films de savon des deux cotés de la tige. Si l'on éclate un des deux films, la tige va être "tractée".

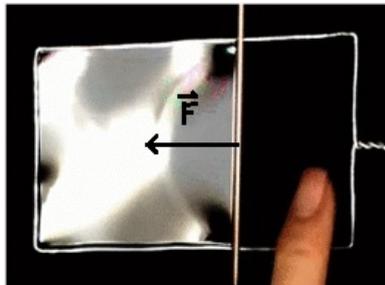


FIGURE 3 –

La force de traction s'écrit alors $F=2\sigma L$ (le facteur 2 est justifié par le fait que le film de savon a deux interfaces)

1.2 Approche thermodynamique : surface minimale

Pour un système homogène, si on le déforme de manière à changer sa surface à volume constant, il y a une contribution à son énergie interne et son entropie. En effet pour changer sa surface il faut fournir un travail $\delta W = \sigma d\Sigma$. L'identité thermodynamique pour une transformation

quasistatique s'écrit donc :

$$dU = TdS - PdV + \sigma d\Sigma \quad (2)$$

$$dF = -SdT - PdV + \sigma d\Sigma \quad (3)$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial \Sigma}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial \Sigma}\right)_{T,V} \quad (4)$$

La tension de surface est une grandeur macroscopique caractéristique du fluide étudié. Elle ne dépend, en général, que de la température. En intégrant la relation (4) on obtient donc :

$$F(T, V, \Sigma) = F_0(T, V) + \sigma(T)\Sigma \quad (5)$$

On étudie un système fluide de volume constant et en contact avec un thermostat (température T_0). A l'équilibre $T=T_0$ le potentiel thermodynamique s'écrit donc :

$$\Phi = U - T_0 S = F(T_0, V, \Sigma) = F_0(T_0, V) + \sigma(T_0)\Sigma \quad (6)$$

A l'équilibre, le potentiel thermodynamique est minimal. On en déduit que le système trouve son équilibre à surface minimale.

Ainsi les fluides vont chercher à diminuer leur surface (à volume constant) pour atteindre un état d'équilibre. C'est, entre autre, ce phénomène qui permet de comprendre l'instabilité de Rayleigh Plateau et plus particulièrement l'inégalité de Plateau.

2 Instabilité de Rayleigh Plateau

2.1 Introduction

L'instabilité de Rayleigh Plateau concerne les cylindres de liquide. Sous certaines conditions, que nous déterminerons, le cylindre de liquide va se fragmenter en gouttelettes. Cette instabilité est notamment visible le long d'un filet d'eau coulant d'un robinet ou le long des toiles d'araignées.

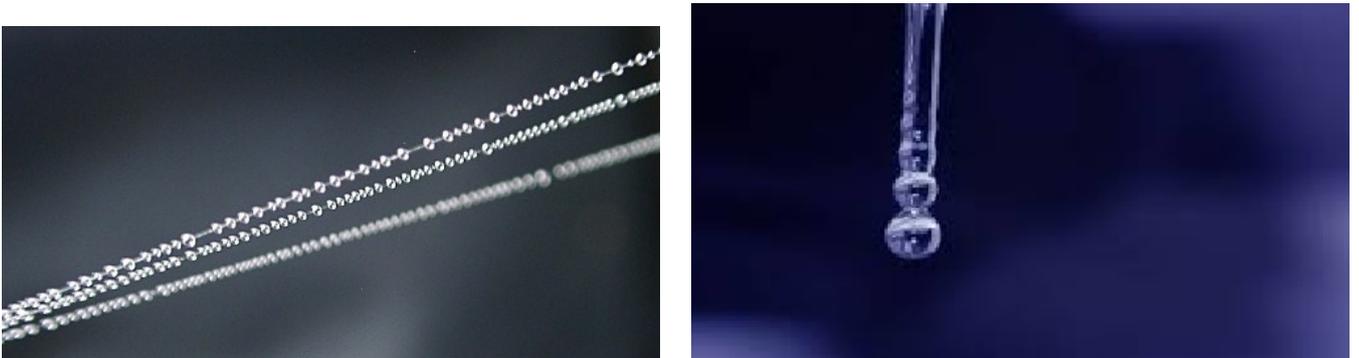


FIGURE 4 –

On étudie un cylindre de liquide quelconque de rayon R et de longueur L . On suppose qu'il se fragmente en n gouttes.

Nous avons vu dans la partie 1 qu'un fluide évolue spontanément pour diminuer sa surface tout en conservant son volume. Ainsi la surface des gouttes S_g doit être strictement inférieure à la surface initiale du cylindre S_c :

$$\pi R^2 L = \frac{4}{3} \pi r^3 n \leftrightarrow n = \frac{3R^2 L}{4r^3} \quad (7)$$

$$\frac{S_g}{S_c} = \frac{n 4\pi r^2}{2\pi RL} = \frac{3R}{2r} \quad (8)$$

Ainsi, si le cylindre se fragmente alors le rayon r de chaque goutte vérifiera l'inégalité :

$$r > \frac{3}{2}R \quad (9)$$

2.2 Inégalité de Plateau

L'instabilité de Rayleigh Plateau provient du fait que le cylindre de liquide se déstabilise car il est soumis à des perturbations à sa surface (dus à l'agitation thermique par exemple). En général ces perturbations peuvent être considérées comme de nature sinusoïdale. Le cylindre ondule tout en conservant sa symétrie cylindrique.

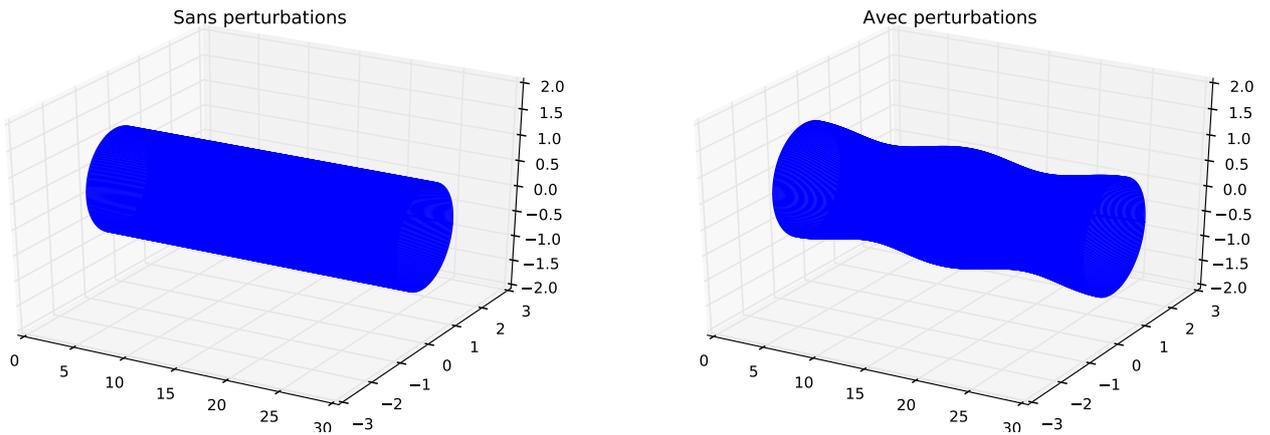


FIGURE 5 –

Considérons donc un cylindre de liquide d'axe z de rayon initial R et de longueur L . Celui-ci se déstabilise spontanément et son rayon s'écrit alors :

$$r = r_0 + \delta_r \cos(kz) \quad (10)$$

k correspond au nombre d'onde de la déformation et r_0 au rayon effectif du cylindre (on le note r_0 car on verra qu'il peut être différent de R). δ_r correspond à l'amplitude initiale de la déformation (cette amplitude évoluera dans le temps lorsqu'on traitera de l'évolution de l'instabilité).

On va donc s'intéresser à ce cas. On en déduira, à partir d'arguments sur la conservation du volume et la minimisation de surface, la condition sur la perturbation pour que celle-ci entraîne l'instabilité : c'est l'inégalité de Plateau.

*Remarque : On ne distingue pas, dans cette partie, le cylindre de liquide porté par une fibre cylindrique (ex : toile d'araignée) et celui lié à un écoulement (ex : robinet). Les calculs qui suivront sont les mêmes dans les deux cas. On fera ici les calculs pour **un cylindre sans fibre cylindrique**. Il faudra, par contre, les distinguer lorsque l'on s'intéressera à l'évolution de l'instabilité/ fragmentation en gouttes (la fibre cylindrique est source de frottements visqueux qui ralentissent l'évolution).*

2.2.1 Conservation du volume

Le volume du cylindre sans perturbations s'écrit :

$$V_{initial} = \pi R^2 L \quad (11)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que la longueur du cylindre est un multiple de la longueur d'onde de la perturbation. Le volume avec perturbation s'écrit alors :

$$V_{final} = \pi r_0^2 L + \pi \delta_r^2 \frac{L}{2} \quad (12)$$

Le calcul détaillé de ce volume se trouve dans l'annexe 1.

On a vu précédemment que si la surface doit diminuer pour que le cylindre soit à l'équilibre, le volume, lui, est conservé. On obtient la relation :

$$\pi r_0^2 L + \pi \delta_r^2 \frac{L}{2} = \pi R^2 L \quad (13)$$

$$r_0 = \sqrt{R^2 - \frac{\delta_r^2}{2}} = R \left(1 - \frac{\delta_r^2}{2R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

On en déduit donc que le rayon effectif du cylindre déformé r_0 est plus petit que le rayon initial pour conserver le volume. On suppose que la surface est initialement faiblement ondulée ($\frac{\delta_r^2}{2R^2} \ll 1$) et on obtient :

$$r_0 = R - \frac{\delta_r^2}{4R} \quad (15)$$

2.2.2 Minimisation de la surface

On considère maintenant que le cylindre a pour longueur λ , c'est-à-dire la longueur d'onde de la déformation. La surface du cylindre sans perturbation s'écrit :

$$S_{initial} = 2\pi R\lambda \quad (16)$$

On peut considérer que la déformation initiale est petite. Ainsi la surface avec perturbation s'écrit :

$$S_{final} = 2\pi\lambda r_0 + \delta_r^2 \pi^2 k r_0 \quad (17)$$

Le calcul détaillé de cette surface se trouve dans l'annexe 2.

En utilisant la relation (15) on obtient :

$$S_{final} = 2\pi\lambda\left(R - \frac{\delta_r^2}{4R^2}\right) + \delta_r^2\pi^2k\left(R - \frac{\delta_r^2}{4R^2}\right) \quad (18)$$

$$S_{final} = 2\pi\lambda R + \delta_r^2\pi^2kR - \left(\frac{2\pi\lambda\delta_r^2}{4R} + \frac{\delta_r^4\pi^2k}{4R}\right) \quad (19)$$

Pour la perturbation perdue et entraîne l'instabilité de Rayleigh Plateau il faut que celle-ci diminue la surface du cylindre. Si ce n'est pas le cas le cylindre va revenir spontanément vers un état plus stable (avec moins de surface), c'est-à-dire l'état initial sans déformation. On a donc la condition :

$$\Delta S = S_{final} - S_{initial} = \delta_r^2\pi^2kR - \frac{2\pi\lambda\delta_r^2}{4R} < 0 \quad (20)$$

$$\lambda > 2\pi R \quad (21)$$

Cette inégalité fut d'abord établie expérimentalement par Plateau (1870). Il nota que l'instabilité survient quand le rapport de sa longueur sur son diamètre est compris entre 3,13 et 3,18 : c'est la plus petite longueur d'onde instable qu'il mit ainsi en évidence.

Références

- [1] Pierre-Gilles de GENNES, Françoise BROCHARD-WYART David QUÉRÉ. *Gouttes, bulles, perles et ondes*.
- [2] Camille DUPRAT. *Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale*. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. <tel-00433439>

Annexe 1 : Calcul du volume

On veut calculer le volume du cylindre avec perturbations de la figure 5 (d'axe z et de longueur L). On rappelle que le rayon du cylindre s'écrit :

$$r = r(z) = r_0 + \delta_r \cos(kz)$$

Il est caractérisée par l'inégalité :

$$x^2 + y^2 \leq r^2(z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Son volume s'écrit alors avec l'intégrale :

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq r^2(z)\}} dx dy dz$$

On passe alors en coordonnées cylindriques $(R, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$:

$$V = \int_{]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, L[} \mathbb{1}_{\{(R,\theta,z) \mid R^2 \leq r^2(z)\}} dR dz d\theta$$

$$V = 2\pi \int_0^L \int_0^{r(z)} R dR dz$$

$$V = \pi \int_0^L r^2(z) dz = \pi \int_0^L (r_0 + \delta_r \cos(kz))^2 dz$$

$$V = \pi \int_0^L (r_0)^2 dz + \pi \int_0^L (\delta_r)^2 \cos^2(kz) dz + \pi \int_0^L 2r_0 \delta_r \cos(kz) dz$$

$$V = \pi r_0^2 L + \frac{2\pi}{k} r_0 \delta_r \int_0^L k \cos(kz) dz + \frac{\pi}{k} \delta_r^2 \int_0^L \cos^2(kz) k dz$$

$$V = \pi r_0^2 L + \lambda r_0 \delta_r \sin(kL) + \frac{\lambda}{2} \delta_r^2 \int_0^{kL} \cos^2(x) dx$$

$$V = \pi r_0^2 L + \lambda r_0 \delta_r \sin(kL) + \frac{\lambda}{2} \delta_r^2 \left(\frac{kL}{2} + \frac{\sin(kL) \cos(kL)}{2} \right)$$

On suppose maintenant que L est un multiple de la longueur d'onde. Tout les termes en $\sin(kL)$ s'annulent et il reste alors :

$$V = \pi r_0^2 L + \frac{\lambda}{2} \delta_r^2 \frac{kL}{2} = \pi r_0^2 L + \pi \delta_r^2 \frac{L}{2}$$

Annexe 2 : Calcul de la surface

On veut calculer la surface du cylindre avec perturbations de la figure 5 (d'axe z et de longueur λ). On rappelle que le rayon du cylindre s'écrit :

$$r = r(z) = r_0 + \delta_r \cos(kz)$$

On passe alors en coordonnées cylindriques $(R, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \lambda[$. On peut en déduire ainsi la paramétrisation du cylindre déformé :

$$\begin{aligned} x &= r(z) \cos(\theta) \\ y &= r(z) \sin(\theta) \\ z &= v \end{aligned}$$

Soit M un point quelconque de coordonnées (x,y,z). L'air du cylindre s'écrit alors avec l'intégrale :

$$S = \int_{]0, 2\pi[\times]0, \lambda[} \left\| \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| dv d\theta$$

On calcule alors ce produit vectoriel :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r_0 \sin(\theta) - \delta_r \cos(kv) \sin(\theta) \\ r_0 \cos(\theta) + \delta_r \cos(kv) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \delta_r k \sin(kv) \\ -\sin(\theta) \delta_r k \sin(kv) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\theta) + \delta_r \cos(kv) \cos(\theta) \\ r_0 \sin(\theta) + \delta_r \cos(kv) \sin(\theta) \\ r_0 \delta_r k \sin(kv) + \delta_r^2 k \cos(kv) \sin(kv) \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| = (r_0 + \delta_r \cos(kv)) \sqrt{1 + (\delta_r k \sin(kv))^2}$$

On verra dans la partie suivante que k est de l'ordre de $\frac{1}{R}$. Or on est toujours dans le cadre de l'approximation $\frac{\delta_r}{R} \ll 1$ (en effet on considère ici **l'amplitude initiale** de la perturbation qui est très petite devant le rayon du cylindre). On peut donc faire le développement limité suivant :

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| \approx (r_0 + \delta_r \cos(kv)) \left(1 + \frac{1}{2} (\delta_r k \sin(kv))^2 \right)$$

L'aire du cylindre de liquide déformé s'écrit donc :

$$S = 2\pi r_0 \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} (\delta_r k \sin(kv))^2 \right) dv + 2\pi \delta_r \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} (\delta_r k \sin(kv))^2 \right) \cos(kv) dv$$

On calcule la première intégrale :

$$\begin{aligned} 2\pi r_0 \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} (\delta_r k \sin(kv))^2 \right) dv &= 2\pi r_0 \lambda + k \delta_r^2 \pi r_0 \int_0^{k\lambda} \sin^2(x) dx \\ 2\pi r_0 \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} (\delta_r k \sin(kv))^2 \right) \cos(kv) dv &= 2\pi r_0 \lambda + \delta_r^2 \pi^2 k r_0 \end{aligned}$$

On calcule maintenant la seconde intégrale :

$$2\pi\delta_r \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2}(\delta_r k \sin(kv))^2\right) \cos(kv) dv = \frac{2\pi\delta_r}{k} \int_0^\lambda k \cos(kv) dv + \pi\delta_r^3 k \int_0^\lambda k \sin^2(kv) \cos(kv) dv$$

$$2\pi\delta_r \int_0^\lambda \left(1 + \frac{1}{2}(\delta_r k \sin(kv))^2\right) \cos(kv) dv = 0 + \pi\delta_r^3 k \left(\int_0^{k\lambda=2\pi} \cos(x) dx - \int_0^{k\lambda=2\pi} \cos^3(x) dx \right) = 0$$

On en déduit donc que la surface du cylindre de liquide déformé (de longueur λ d'axe z et de rayon $r(z)$) s'écrit :

$$S = 2\pi r_0 \lambda + \delta_r^2 \pi^2 k r_0$$