Instabilité de Rayleigh Plateau

Partie 2: Etude de l'évolution de l'instabilité pour un fluide le long d'une fibre

Thomas Andrade Maxime Baudot Nicolas Captier Théo Torcq

6 mai 2016

On traitera, dans cet article, de l'évolution de l'instabilité de Rayleigh-Plateau pour un fluide le long d'une fibre cylindrique d'axe Oz. On va considérer que la fibre a un rayon constant R et que e est l'épaisseur de la couche de liquide autour de celle-ci (e dépend du temps et de z : on détaillera son expression dans la partie 4).

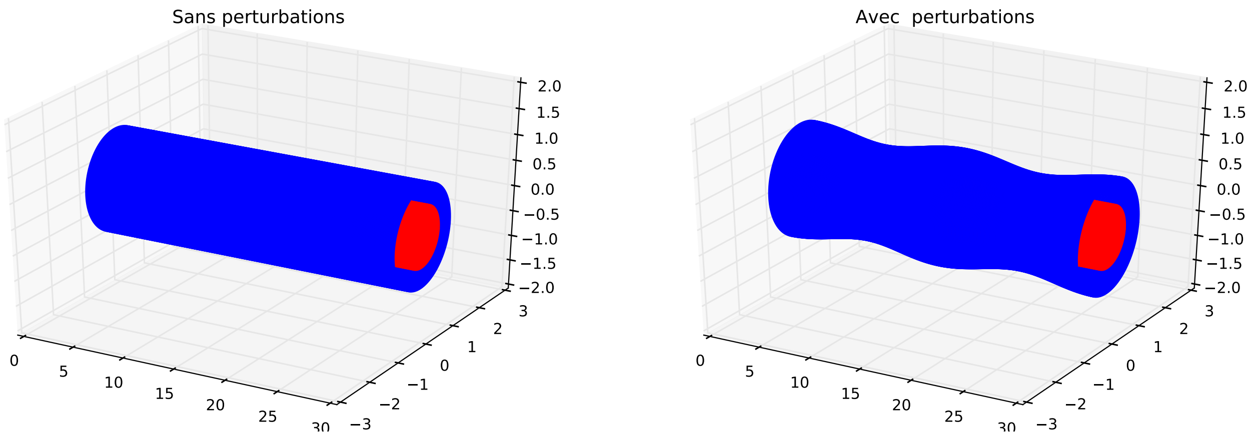

FIGURE 1 –

1 Approximation de lubrification : équation de Navier-Stokes

Que l'on étudie un liquide qui s'écoule le long d'une fibre cylindrique verticale ou un cylindre de liquide formé autour d'une fibre horizontale, l'instabilité de Rayleigh-Plateau implique un déplacement de liquide (le fluide se répartie le long de la fibre pour former des gouttes). Ainsi il faut étudier la dynamique de ce liquide (fluide incompressible). Celle-ci est régie par l'équation de Navier-Stokes. Cette équation découle de la condition d'incompressibilité $div(v) = 0$ et de la réécriture du principe fondamental de la dynamique de Newton par unité de volume :

$$\vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1}$$

f est une force par unité de volume qui correspond à la somme des forces visqueuses ($f_v = \eta\,\Delta\,v$ avec η la viscosité et $\Delta\,v$ le laplacien) et de forces motrices. Pour une fibre dont la composante verticale est non-nulle la force motrice sera la gravité ($f = \rho\,g$) mais de manière plus générale (par exemple pour une fibre horizontale comme celle que l'on a étudiée dans la partie 1) la force motrice s'écrit comme un gradient de pression. En effet le fluide se déplace des zones de forte pression à celles de basse pression ; la force par unité de volume s'écrit $f_v = -\overrightarrow{\text{grad}}p$. Lorsque l'on a besoin, on prend en compte la gravité en introduisant dans ce gradient de pression la pression hydrostatique.
En rajoutant la condition d'incompressibilité $div(v) = 0$ on obtient l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\vec{v})\vec{v} = f_m + f_v = -\overrightarrow{\text{grad}}p + \eta\,\vec{\Delta}\vec{v} \tag{2}$$

Cette équation est en général très difficile à résoudre. Il va donc falloir, pour étudier l'évolution de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, faire des approximations pour simplifier cette équation.

On va considérer, comme dans la Partie 1, que le film de liquide est mince. Autrement dit **l'épaisseur e de la couche de liquide autour de la fibre est petite devant les dimensions de la fibre** (ex : longueur d'onde de la déformation). Cela va nous permettre de faire un certains nombres d'approximation et de simplifier ainsi considérablement l'équation de Navier-Stokes : c'est l'approximation de lubrification.

-Premièrement la composante du vecteur visite selon l'axe de l'écoulement (ici on considéra que le liquide s'écoule selon l'axe Oz) est très supérieure aux autres composantes. Ainsi on pourra confondre le vecteur vitesse à sa composante selon z. On ne s'intéressera donc qu'à la projection de l'équation de Navier-Stokes sur l'axe Oz

-Deuxièmement le profil de vitesse est continue (autrement dit à z fixé la fonction v(r) est continue). Or à l'interface solide/liquide (au bord de la fibre) la vitesse du liquide est nulle. Ainsi on en déduit que la vitesse du fluide près de la fibre est lente. Dans notre approximation des films minces on peut donc en déduire que l'écoulement est lent. Or on peut calculer, pour un écoulement de vitesse moyenne V sur une longueur de L, l'ordre de grandeur du terme inertiel $\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\vec{v})v_z$ et celui du terme visqueux $\eta\Delta\vec{v}$:

$$\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\vec{v})v_z \sim \rho\frac{V^2}{L}$$
$$\eta\Delta\vec{v} \sim \eta\frac{V}{L^2}$$

En faisant le rapport de ces deux quantités on retrouve le nombre de Reynolds. Pour la plupart des films minces il est petit devant 1. On peut donc négliger le terme inertiel.
Enfin on rajoute à l'approximation de lubrification le fait que l'écoulement que l'on étudie soit stationnaire. On obtient donc pour un liquide qui s'écoule le long d'une fibre dirigée selon l'axe z, dans la limite des films minces (équations de Navier-Stokes projetée sur z et avec les approximations énoncées ci-dessus) :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\Delta\,v_z = 0 \tag{3}$$

On peut simplifier le laplacien de v_z. On l'écrit d'abord en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\, v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial^2 z}$$

Par symétrie cylindrque on peut dire que v_z ne dépend pas de θ ni de z. Les deux derniers termes s'annulent et on obtient :

$$\Delta\, v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

On peut négliger le deuxième terme. Ainsi on obtient l'équation :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = 0 \tag{4}$$

2 Pression dans le liquide : Théorème de Laplace

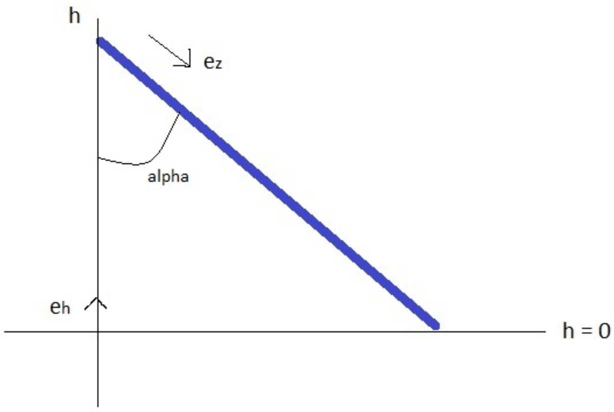

FIGURE 2 – fibre avec un angle alpha par rapport à la verticale (coordonnée h)

Dans la partie précedente on a simplifié l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible pour obtenir une équation différentielle pour la composante v_z du vecteur vitesse (on rappelle que z est l'axe de l'écoulement). Pour pouvoir résoudre cette équation il faut calculer la dérivée partielle de la pression dans le fluide en z.

La pression hydrostatique se calcule à l'aide de la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\frac{\partial p_{hydro}}{\partial h} = -\rho\, g \tag{5}$$

En utilisant le fait que le fluide est incompressible (ρ ne dépend pas de h) et des relations de trigonométrie on peut écrire :

$$p_{hydro}(h) = p_{hydro}(h_{fibre}) + \rho\, g(h_{fibre} - h) = p_{atm} + \rho\, g\Delta\, h$$
$$\Delta\, h = z\, cos(alpha)$$

On peut donc en déduire l'expression de la pression hydrostatique en fonction de la coordonnée z de l'axe du cylindre et de l'angle alpha que la fibre fait avec la verticale :

$$p_{hydro}(z) = p_{atm} + \rho\, gz\, cos(alpha) \tag{6}$$

Remarque : On a considèré que la pression hydrostatique était la même dans toute la section du cylindre à h fixé. Pourtant si l'on prend, par exemple, le cas d'un cylindre horizontale, la pression n'est pas la même à la surface et au niveau de la fibre (il faut ajouter une composante $\rho\, ge$ avec e l'épaisseur de la couche. Dans l'approximation des films minces cette composante est très petite devant la pression à la surface on pourra donc la négliger.

Comme dit dans la section précedente, la pression dans le fluide est égale à la somme de la pression hydrostatique mais aussi la pression de Laplace. La pression de Laplace est dû à une discontinuité de la pression hydrostatique à la traversée d'une interface courbe. Le théorème de Laplace permet de calculer la pression de Laplace pour une surface courbe en fonction de sa courbure C et de sa tension de surface σ :

$$p_{Laplace} = \Delta\, p = C\sigma \tag{7}$$

On peut calculer la courbure de notre cylindre de fluide déformé en fonction de la coordonnée z (cf annexe 1).

$$C = \frac{1}{R+e} - \frac{\partial^2 e}{\partial z^2}$$

La pression totale dans le fluide à la coordonnée z s'écrit donc :

$$p(z) = p_{laplace}(z) + p_{hydro}(z) = (p_{atm} + \rho\, gz\, cos(alpha)) + (\frac{1}{R+e} - \frac{\partial^2 e}{\partial z^2})\sigma \tag{8}$$

3 Débit volumique et conservation de la masse

Pour trouver l'équation d'évolution de l'instabilité à partir de l'équation de Navier-Stokes (partie 1), on aura besoin d'utiliser la notion de débit volumique :

$$Q = \int_S v(r).dS \tag{9}$$

$$Q = \int_S v(r) r dr d\theta \tag{10}$$

On peut maintenant se placer sur une tranche de cylindre de largeur dz. On peut écrire que la variation de la masse dans la tranche de cylindre par unité de temps est égale à la variation de son volume par unité de temps multipliée par sa masse volumique ρ (qui ne dépend pas du temps).
Cette variation est aussi égale à la masse qui entre dans la tranche de fluide en z moins la masse

qui sort de la tranche en z + dz (le débit volumique multiplié par la masse volumique) :

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\,(Q(z) - Q(z+dz))$$
$$\frac{dm}{dt} = \rho\,\frac{d(\pi\,(R+e)^2dz - \pi\,R^2dz)}{dt}dz = \rho\,(-dQ)$$
$$\frac{dm}{dt} = \rho\,[2\pi\,R\frac{de}{dt} + \pi\frac{de^2}{dt}]dz = \rho\,(-dQ)$$
$$\frac{dm}{dt} = \rho\,[2\pi\,R\frac{de}{dt} + 2\pi\,e\frac{de}{dt}]dz = \rho\,(-dQ)$$

On en déduit ainsi que :

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{2\pi\,(R+e)}\frac{dQ}{dz} \tag{11}$$

4 Equation d'évolution de l'instabilité de Rayleigh-Plateau

On considère donc une fibre de rayon R et d'axe z recouvert d'une épaisseur e(t) de liquide (caractérisé par s tension de surface σ et sa viscosité η). On considère que la surface du liquide subit une déformation initiale :

$$e(z,t) = e_0 + \delta(t)cos(kz)$$

Cette déformation vérifie l'inégalité de Plateau ($\lambda > 2\pi\,(R+e_0)$) et entraine donc l'apparition de l'instabilité.
On veut obtenir l'évolution de l'épaisseur e du fluide en fonction du temps.

On cherche, dans un premier temps la vitesse du fluide autour de la fibre en fonction de r (le rayon). On se place, pour cela, dans l'approximation de lubrification (cf. partie 1). On a donc l'équation différentielle :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation il faut préciser que l'on a considéré que $\frac{\partial p}{\partial z}$ ne dépendait pas de r. En outre il faut préciser les conditions aux limites :

$$v(r=R) = 0$$
$$\eta\frac{\partial v}{\partial r}(r = R+e) = 0$$

On ontient donc :

$$v(r) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2 + R^2 + 2Re - 2r(R+e)) \tag{12}$$

On peut alors calculer le débit volumique. En effet d'après la partie précédente on pourra relier ce débit à la varition temporelle de e et obtenir une équation d'évolution.

$$Q = \int_S v(r)dS = 2\pi \int_R^{R+e} v(r)rdr$$
$$Q = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}2\pi \int_R^{R+e} (r^2 + R^2 + 2Re - 2r(R+e))dr$$

On obtient, en développant l'expression :

$$Q = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}2\pi(\frac{5}{12}e^4 + \frac{2}{3}Re^3) \tag{13}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{5\pi}{12\eta}(\frac{\partial e}{\partial z}4e^3\frac{\partial p}{\partial z} + e^4\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}) - \frac{2\pi}{3\eta}(\frac{\partial e}{\partial z}3Re^2\frac{\partial p}{\partial z} + Re^3\frac{\partial^2 p}{\partial z^2})$$

Or on a déjà calculé dans la partie 2 l'expression de la pression en fonction de z (pression de Laplace) :

$$p = \sigma\,(\frac{1}{(R+e)} - \frac{d^2e}{dz^2})$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -(\frac{1}{(R+e)^2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial^3 e}{\partial z^3})$$

En dérivant par rapport à z et en utilisant la relation (11) démontrée dans la partie précédente, on obtient l'équation d'évolution de l'instabilité de Rayleigh-Plateau :

$$A = \frac{2Re^2}{(R+e)^2} + \frac{5}{3}\frac{e^3}{(R+e)^2} - \frac{4}{3}\frac{Re^3}{(R+e)^3} - \frac{5}{6}\frac{e^4}{(R+e)^3}$$
$$B = 2Re^2 + \frac{5}{3}e^3$$
$$C = \frac{2}{3}Re^3 + \frac{5}{12}e^4$$
$$D = \frac{2}{3}\frac{Re^3}{(R+e)^2} + \frac{5}{12}\frac{e^4}{(R+e)^2}$$

$$cos(kz)\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\sigma}{2\eta(R+e)} * [(Bk^2 - A)sin^2(kz)\delta^2 + (Dk^2 - C)cos(kz)\delta] \tag{14}$$

5 Autre équation d'évolution avec une approximation supplémentaire

On cherche toujours à obtenir l'évolution de l'épaisseur e en fonction du temps, pour une déformation de la forme (et vérifiant l'inégalité de Plateau) :

$$e(z,t) = e_0 + \delta(t)cos(kz)$$

Seulement ici on va considérer que l'épaisseur de la couche de fluide est négligeable devant le rayon de la fibre. Cette considération est justifiée par l'approximation de lubrification, faite au départ, qui considère que l'épaisseur est petite par rapport aux autres grandeurs du problèmes.

Nous avons, tout de même, traité le cas général dans la partie précédente car lors de nos expèriences nous avons des épaisseurs peu négligeables par rapport au rayon de la fibre ()

La première conséquence est que le débit volumique s'écrit plus facilement :

$$dS = rdrd\theta \quad R \leqslant r \leqslant R + e \Rightarrow dS \approx Rdrd\theta \quad \text{(on a négligé e par rapport à R)}$$

$$Q = \int_S v(r)dS = R2\pi \int_R^{R+e} v(r)dr = R2\pi q \quad \text{(q correspond au débit linéique)}$$

$$Q = -R2\pi \frac{\partial p}{\partial z}\frac{e^3}{3\eta}$$

On peut également négliger l'épaisseur e dans l'équation (11), on obtient ainsi :

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{2\pi\,(R+e)}\frac{dQ}{dz} \approx -\frac{1}{2\pi\,R}2\pi\,R\frac{dq}{dz}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{dq}{dz} \tag{15}$$

L'expression de la pression reste la même, on peut donc écrire :

$$q = -\frac{\partial p}{\partial z}\frac{e^3}{3\eta} \approx (\frac{1}{R^2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial^3 e}{\partial z^3})\frac{e^3}{3\eta}$$

En dérivant q par rapport à z et en utilisant l'équation :

$$cos(kz)\frac{\partial \delta}{\partial t} = \delta\frac{\sigma}{3\eta}\frac{(1-R^2k^2)}{R^2}\,(e^3k^2\,cos(kz) + 3e^2k\,sin(kz)) \tag{16}$$

Références

[1] Pierre-Gilles de Gennes, Francoise Brochard-Wyart David Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*

[2] Camille Duprat. *Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale.* Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. <tel-00433439>

Annexe 1 : Calcul de la courbure

On rappelle que l'on considère une surface faiblement ondulée. En effet on a considéré (pour appliquer l'approximation de lubrification) que l'épaisseur de liquide autour de la fibre e était petite par rapport aux autres grandeurs du problème. En particulier on peut supposer que $e << \lambda$. Cette affirmation a été confirmée par les expériences que nous avons réalisées (). Ainsi on supposera pour la suite que $\delta < e << \lambda$ donc $\delta\, k << 1$.

Le calcule de la courbure de la surface de notre cylindre peut se diviser en deux parties. En effet elle s'écrit comme la somme de deux courbures principales. Celles-ci sont les courbures des courbes obtenues dans le plan transverse (on voit un cercle) et dans le plan contenant l'axe du cylindre et orthogonal au plan transverse (on voit une courbe sinusoïdale).

La courbure transverse se calcule facilement ; c'est l'inverse du rayon du cylindre en z : $\frac{1}{R+e}$.

Le calcul de la courbure longitudinale revient à calculer de la courbure de la courbe paramétrée par :

$$\gamma : z \mapsto (z, e0 + \delta(z,t) cos(kz)) \quad z \in [0, L]$$

On calcule d'abord l'abscisse curviligne :

$$S(z) = \int_0^z |\gamma'(u)| du = \int_0^z (1 + (k\delta\, sin(uz))^2)^{\frac{1}{2}} du$$

D'après ce que l'on a dit précedemment, on peut considérer que $(k\delta\, sin(uz))^2 << 1$. Ainsi on obtient :

$$S(z) = z + \frac{k\delta^2}{2} \int_0^z sin(ku)^2 du = z + \frac{k\delta^2}{2}(z - \frac{1}{4}\delta^2 ksin(2kz))$$

On rappelle que l'on considère que la surface est faiblement ondulée ($\delta\, k << 1$). Ainsi on a :

$$S(z) \approx z$$
$$e(S) \approx e0 + \delta\, cos(kS)$$

On peut finalement calculer la seconde courbure principale :

$$|\frac{d^2\gamma}{dS^2}| = ||(0, -k^2\delta\, cos(kS)|| = k^2\delta |cos(kS)| = -\frac{\partial^2 e}{\partial z}$$

La courbure de la surface s'écrit comme la somme des deux courbures principales :

$$C = \frac{1}{R+e} - \frac{\partial^2 e}{\partial z^2}$$